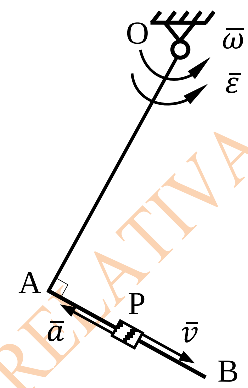
APLICAȚIA 1

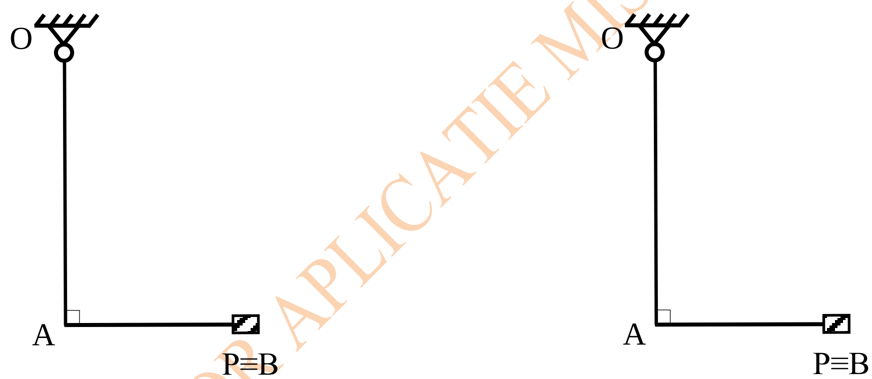
Bara cotită din figură (OA=1,2 m, AB=0,8 m) se roteşte în jurul punctului fix O în planul ei, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon}$. În acelaşi timp, pe bara AB se mişcă punctul P cu viteza $\bar{v}$ şi accelerația $\bar{a}$.



Să se determine viteza absolută şi accelerația absolută pentru punctul P la momentul de timp t_1 ştiind că la acest moment de timp bara OA este verticală (A în jos), punctul P ajunge în B, viteza unghiulară a barei are valoarea ω=0,393 s^{-1}, accelerația unghiulară a barei este ε=0,196 s^{-2} iar viteza şi accelerația punctului au valorile v=0,2 m/s respectiv a=0,3 m/s^2.

REZOLVARE

Se reprezintă pozițiile barei şi punctului material la momentul de timp t_1. Se vor efectua două desene (într-unul se vor reprezenta vitezele şi în celălalt accelerațiile).

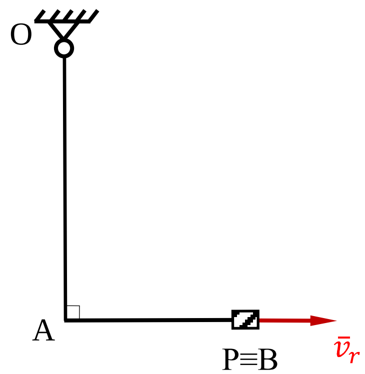


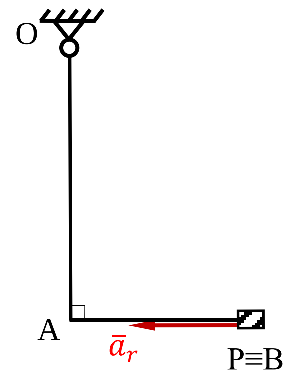
Se identifică mişcările relativă şi de transport. În acest caz, mişcarea de transport este mişcarea de rotație a barei OAB în raport cu punctul fix O (punctul P fiind considerat imobilizat în poziția B) iar mişcarea relativă este mişcarea punctului P pe segmentul AB (bara OAB fiind imobilizată).

Se studiază fiecare mişcare independent şi se identifică elementele mişcării punctului (viteza şi accelerația) în acea mişcare:

Mişcarea relativă este mişcarea rectilinie a punctului P pe bara AB (bara AB fiind imobilizată). Se obțin viteza relativă şi accelerația relativă, reprezentate în următoarea figură:

$$v_r = v = 0{,}2\ m/s$$
$$a_r = a = 0{,}3\ m/s$$





Mişcarea de transport este mişcarea de rotaţie a barei OAB în raport cu punctul fix O, punctul P fiind imobilizat în poziţia B (ca şi cum punctul P ar fi un punctul B al barei OAB). Viteza şi acceleraţia punctului în mişcarea de transport se vor determina din studiul mişcării barei.

Viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a barei în mişcarea de transport sunt:

$$\omega_t = \omega = 0{,}393\ s^{-1}$$
$$\varepsilon_t = \varepsilon = 0{,}196\ s^{-2}$$

Pentru calculul vitezei şi acceleraţiei de transport trebuie să determinăm mărimea segmentului OP (identic la acest moment de timp cu OB):

$$OP = \sqrt{OA^2 + AP^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}8^2} = 1{,}442\ m$$

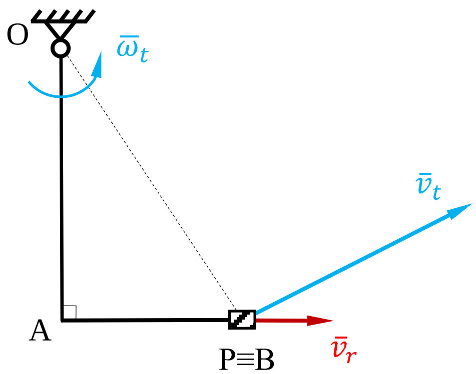
Viteza de transport a punctului P este:

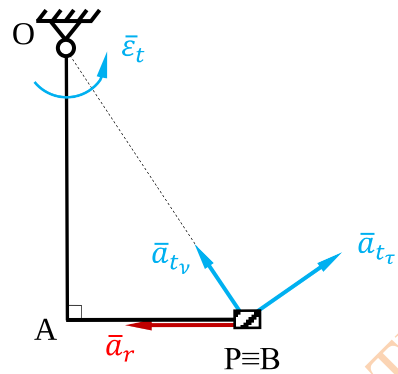
$$v_t = \omega_t \cdot OP = 0{,}393 \cdot 1{,}442 = 0{,}567\ m/s$$

Acceleraţia de transport a punctului P are două componente: una tangenţială ($\bar{a}_{t_\tau}$) şi una normală ($\bar{a}_{t_\nu}$). Mărimile acestora sunt:

$$a_{t_\tau} = \varepsilon_t \cdot OP = 0{,}196 \cdot 1{,}442 = 0{,}283\ m/s^2$$
$$a_{t_\nu} = \omega_t^2 \cdot OP = 0{,}393^2 \cdot 1{,}442 = 0{,}223\ m/s^2$$

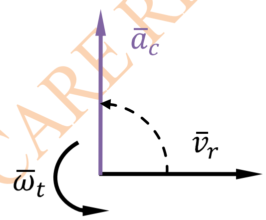
Viteza şi componentele acceleraţiei de transport se reprezintă în următoarea figură:





Pentru calculul accelerației absolute trebuie determinată **accelerația Coriolis**.

$$\bar{a}_c = 2 \cdot \bar{\omega}_t \times \bar{v}_r$$



Mărimea accelerației Coriolis este

$$a_c = 2 \cdot \omega_t \cdot v_r = 2 \cdot 0{,}393 \cdot 0{,}2 = 0{,}157 \ m/s^2$$

Putem determina acum **viteza absolută** și **accelerația absolută** ale punctului P cu relațiile:

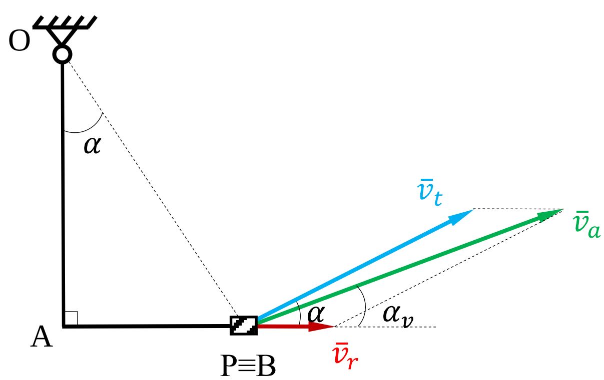
$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$
$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

Pentru determinarea vitezei absolute a punctului P vom utiliza regula paralelogramului, deoarece aceasta este o sumă a doi vectori. Astfel, mărimea acesteia va fi:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2 \cdot v_r \cdot v_t \cdot \cos(\widehat{\bar{v}_r, \bar{v}_t})}$$

$$\cos(\widehat{\bar{v}_r, \bar{v}_t}) = cos \propto = \frac{OA}{OB} = \frac{1{,}2}{1{,}442} = 0{,}832$$

$$v_a = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}567^2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}567 \cdot 0{,}832} = 0{,}742 \ m/s$$

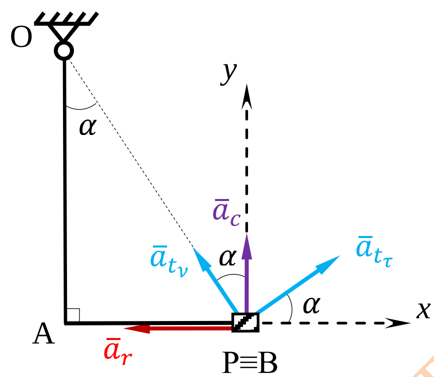


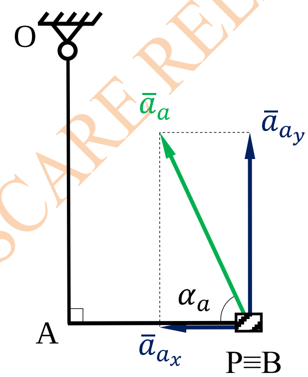
Direcția vitezei absolute a punctului P este dată de unghiul α_v, făcut cu direcția vitezei relative. Aplicând teorema sinusului rezultă:

$$\sin\alpha_v = \frac{v_t}{v_a} \cdot \sin(180 - \alpha) = \frac{v_t}{v_a} \cdot \sin\alpha = \frac{0{,}567}{0{,}742} \cdot 0{,}555 = 0{,}424 \Longrightarrow \alpha_v \simeq 25°$$

$$sin\alpha = \frac{0{,}8}{1{,}442} = 0{,}555$$

Pentru determinarea accelerației absolute vom aplica teorema proiecțiilor pe două direcții convenabile (orizontală, respectiv verticală):





$$a_{a_x} = a_{t_\tau} \cdot cos\alpha - a_r - a_{t_v} \cdot sin\alpha = 0{,}283 \cdot 0{,}832 - 0{,}3 - 0{,}223 \cdot 0{,}555 = -0{,}188\ m/s^2$$

$$a_{a_y} = a_{t_\tau} \cdot sin\alpha + a_c + a_{t_v} \cdot cos\alpha = 0{,}283 \cdot 0{,}555 + 0{,}157 + 0{,}223 \cdot 0{,}832 = 0{,}500\ m/s^2$$

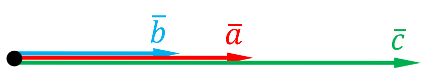
$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2} = \sqrt{(-0{,}188)^2 + 0{,}5^2} = 0{,}534\ m/s^2$$

Direcția accelerației absolute este dată de unghiul făcut cu componenta sa orizontală, α_a:

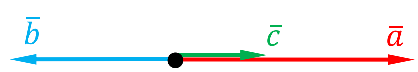
$$tg\alpha_a = \frac{a_{a_y}}{a_{a_x}} = \frac{0{,}5}{0{,}188} = 2{,}66 \Longrightarrow \alpha_a \simeq 69{,}39°$$

Observație:

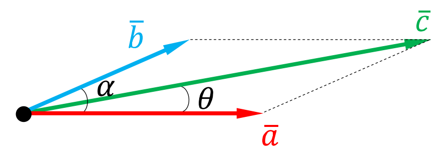
Compunerea a doi vectori concurenți ($\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$):



$c = a + b$

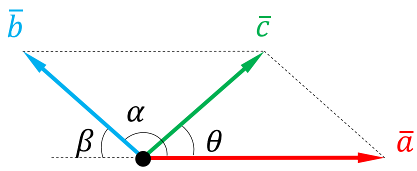


$c = a - b$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}$$

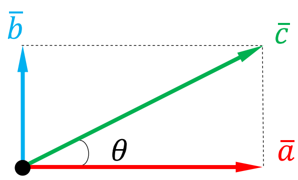
$$sin\theta = \frac{b}{c} \cdot sin\alpha$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\beta}$$

$$sin\theta = \frac{b}{c} \cdot sin\alpha$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\theta = \frac{b}{a}$$