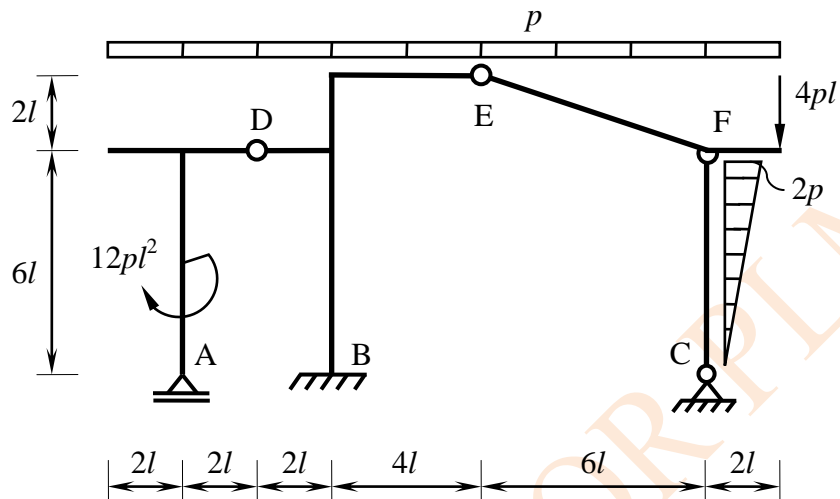


## APLICAȚIA 1.2

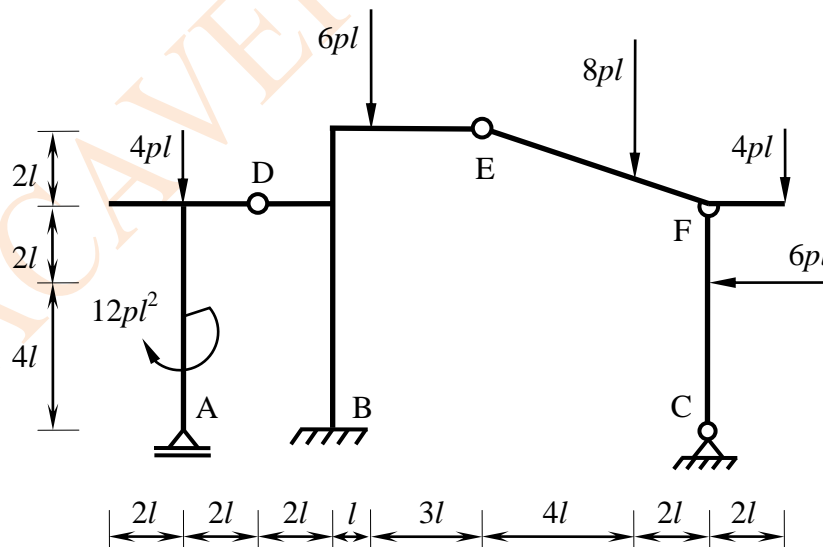
Utilizând principiul lucrului mecanic virtual determinați reacțiunea verticală din încastrare.



Obs. Aspectele teoretice necesare se găsesc în cadrul aplicației PLMV Moment încastrare.

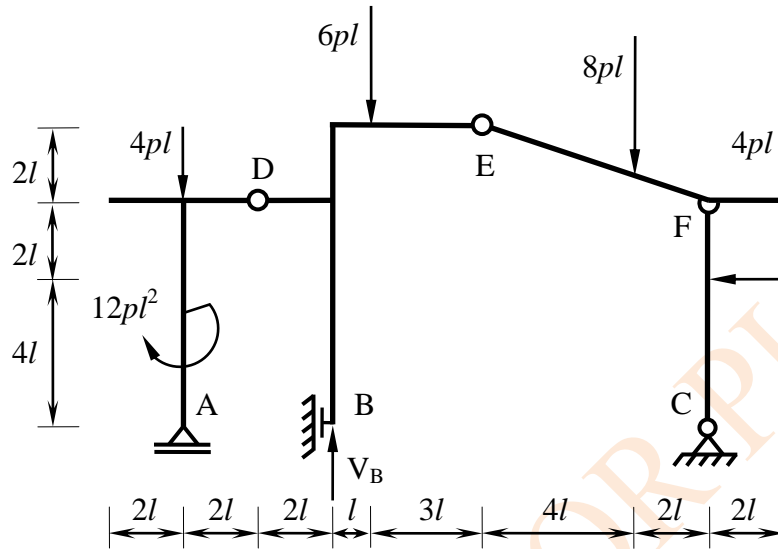
### Rezolvarea aplicației

Se verifică dacă sistemul de corpuri este static determinat și se aranjează încărcările pe fiecare corp, ca și când am izola corpurile.



Se transformă sistemul de corpuri static determinat într-un mecanism cu un grad de libertate. Se înlocuiește cu reacțiunea verticală  $V_B$  legătura simplă ce suprimă corpului BDE posibilitatea de translație pe direcție verticală. Astfel, în locul încastrării va rămâne o încastrare

glisantă ce permite corpului BDE o mișcare de translație pe direcție verticală. Sensul inițial al reacțiunii  $V_B$  a fost ales aleator. Rezolvarea acestei reacțiuni ne va spune dacă sensul ales inițial este corect sau nu.

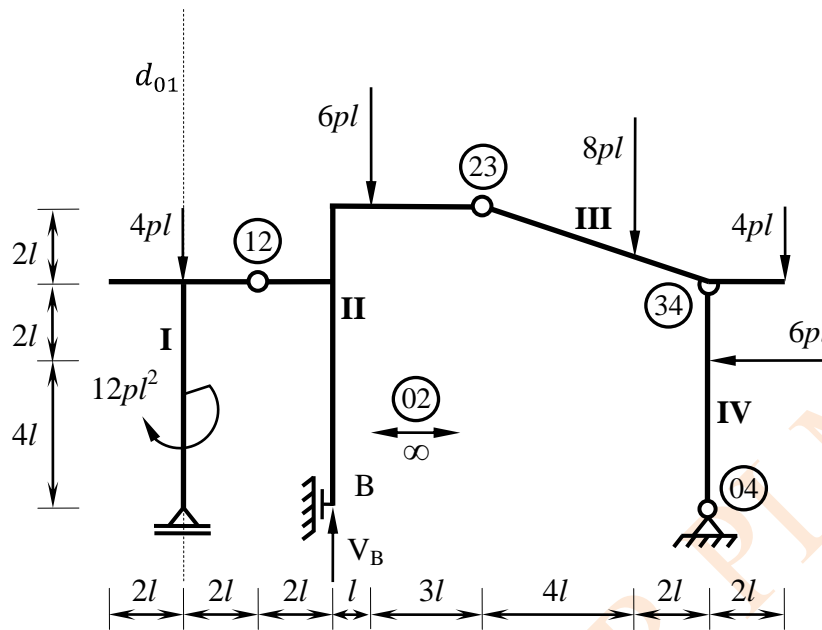


Se identifică corpurile fixe din mecanism. Se observă că nu există (la prima vedere) corpuri fixe. Se numerează corpurile din mecanism (aici 4).

Se determină pozițiile centrelor de rotație date de legăturile mecanismului. Astfel:

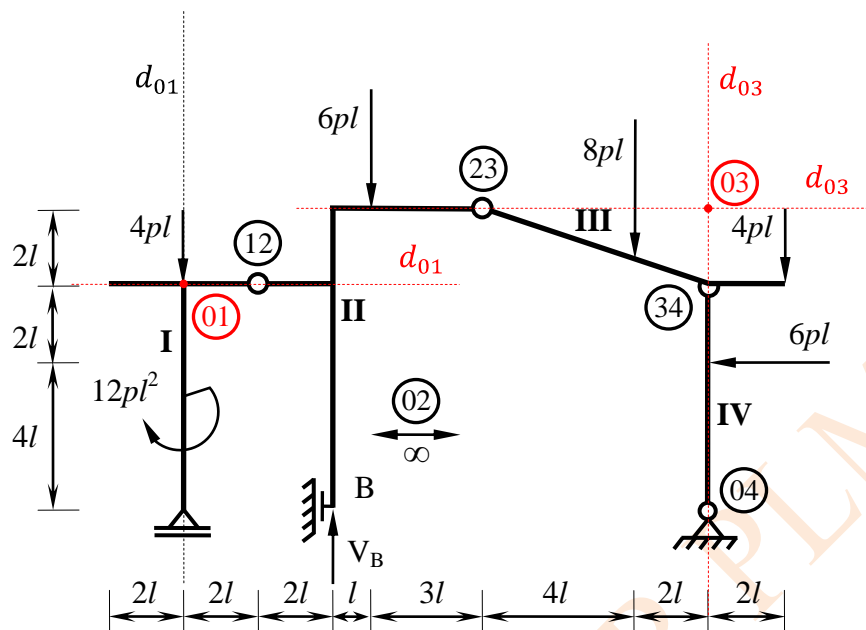
- în punctul C este o articulație fixă (articulație exterioară); aici va fi centrul absolut de rotație al corpului IV ( (04) );
- în punctele D, E și F sunt articulații intermediare simple; aici se află atunci centrele relative de rotație (12), (23) respectiv (34);
- în punctul A se află un reazem simplu vertical; pe direcția reazemului simplu (verticală ce trece prin punctul A) se va afla centrul absolut de rotație al corpului I, (01); această dreaptă se va nota cu  $d_{01}$ .
- în punctul B se află o încastrare glisantă ce permite translația corpului II pe verticală; atunci, centrul absolut de rotație al corpului II ( (02) ) este la infinit pe direcție orizontală.

Obs. Dacă un punct se află la infinit pe o direcție, atunci el se va afla pe toate dreptele care au acea direcție.



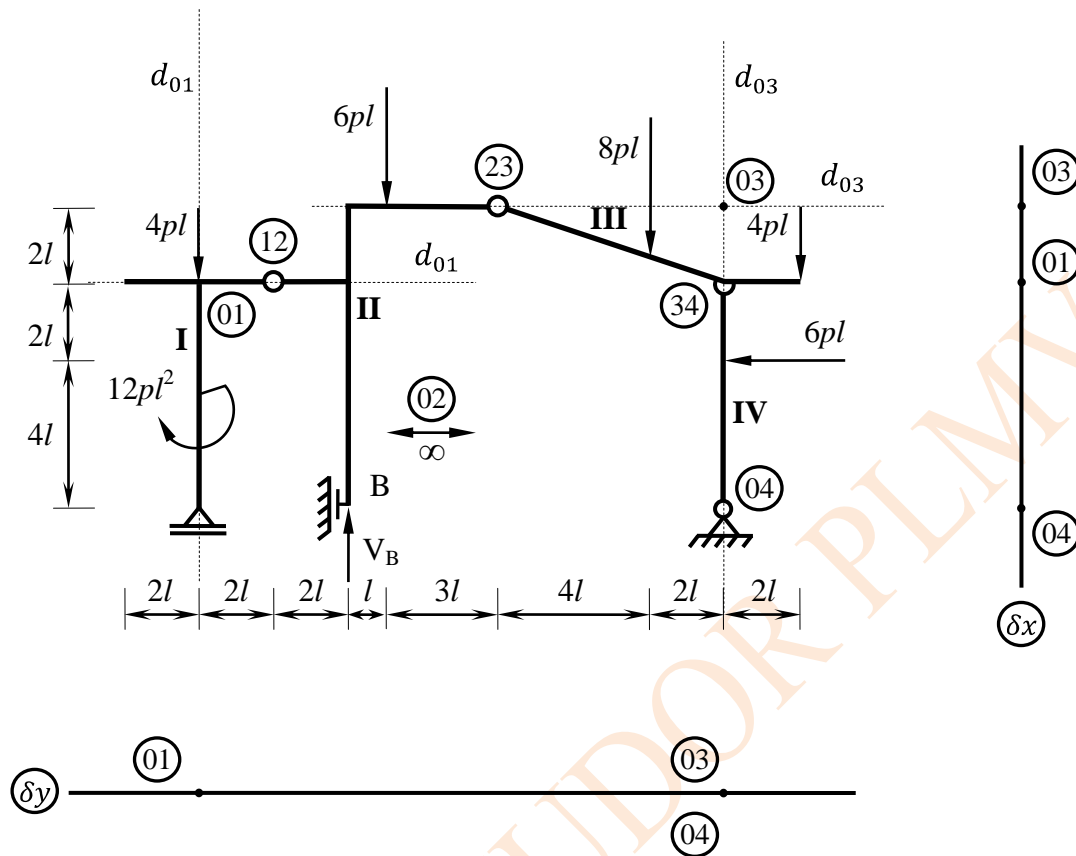
Se determină pozițiile celorlalte centre de rotație necesare ( (01), (03) ) aplicând regula indicilor. Astfel:

- centrul absolut de rotație (02) se află pe orice orizontală (se află la infinit pe orizontală), deci și pe orizontala ce trece prin centrul relativ de rotație (12); s-a găsit astfel o dreaptă ce conține centrele de rotație (02) și (12), iar conform regulii indicilor pe această dreaptă, notată cu  $d_{01}$ , se află și centrul absolut de rotație al corpului I, (01);
- centrul absolut de rotație (02) se află pe orice orizontală (se află la infinit pe orizontală), deci și pe orizontala ce trece prin centrul relativ de rotație (23); s-a găsit astfel o dreaptă ce conține centrele de rotație (02) și (23), iar conform regulii indicilor pe această dreaptă, notată cu  $d_{03}$ , se află și centrul absolut de rotație al corpului III, (03);
- pe dreapta ce conține centrele de rotație (04) și (34) se află și centrul de rotație (03); aceasta se notează tot cu  $d_{03}$ ;
- la intersecțiile dreptelor ce conțin aceleași centre de rotație se află acele centre de rotație ( (01) respectiv (03) ); pozițiile acestora sunt deja cunoscute.



Trasarea diagramelor de deplasări virtuale.

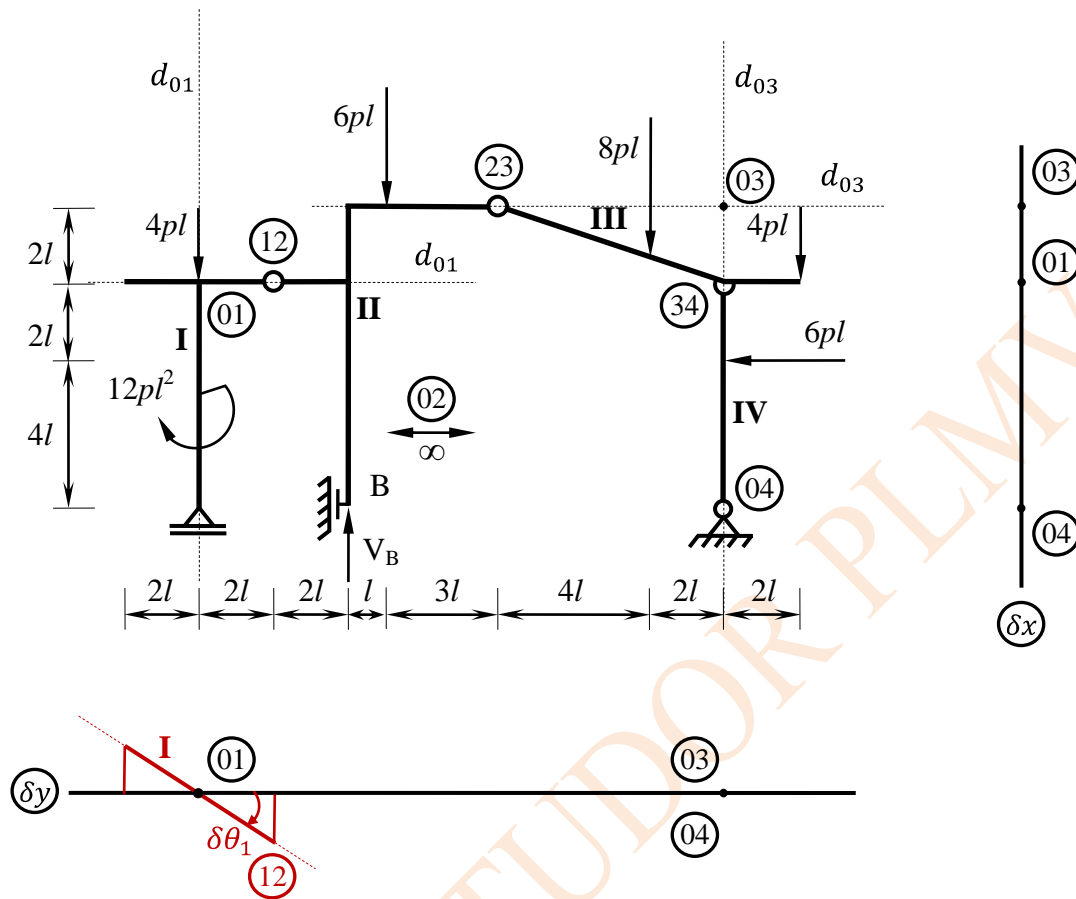
Se trasează liniile de referință ale diagramelor și se proiectează pe acestea centrele absolute de rotație. Într-o diagramă vom citi deplasări virtuale orizontale  $\delta x$  iar în cealaltă vom citi deplasările virtuale verticale  $\delta y$ .



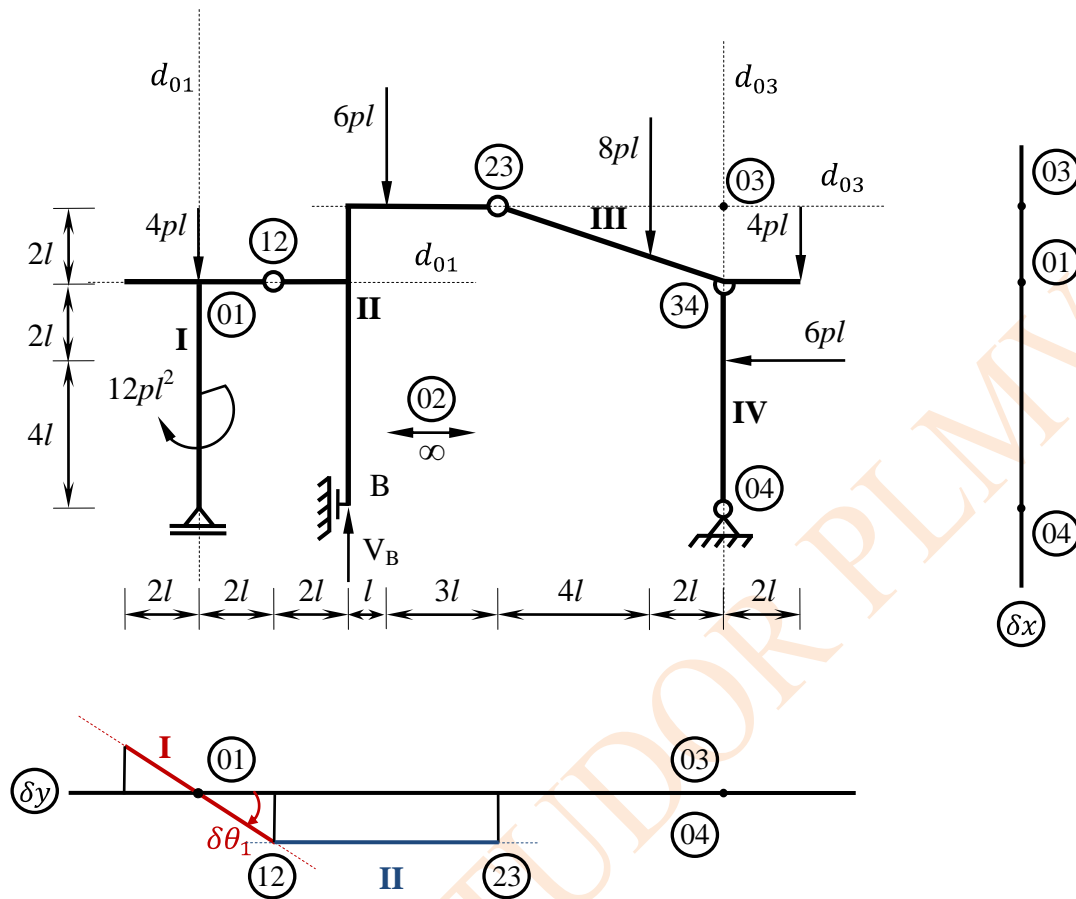
Vom începe cu trasarea diagramelor de deplasări virtuale verticale. Pentru aceasta vom da o rotire virtuală unuia dintre corpuri (de exemplu corpul I) în ce sens dorim.

Rezultă o dreaptă de pantă  $\delta\theta_1$  ce trece prin proiecția centrului absolut de rotație (01) pe linia de referință a diagramei  $\delta y$ . Prin proiectarea corpului I pe această dreaptă se determină diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului I. Rotirea virtuală a corpului va avea sensul unghiului măsurat de la linia de referință la diagramă pe drumul cel mai scurt.

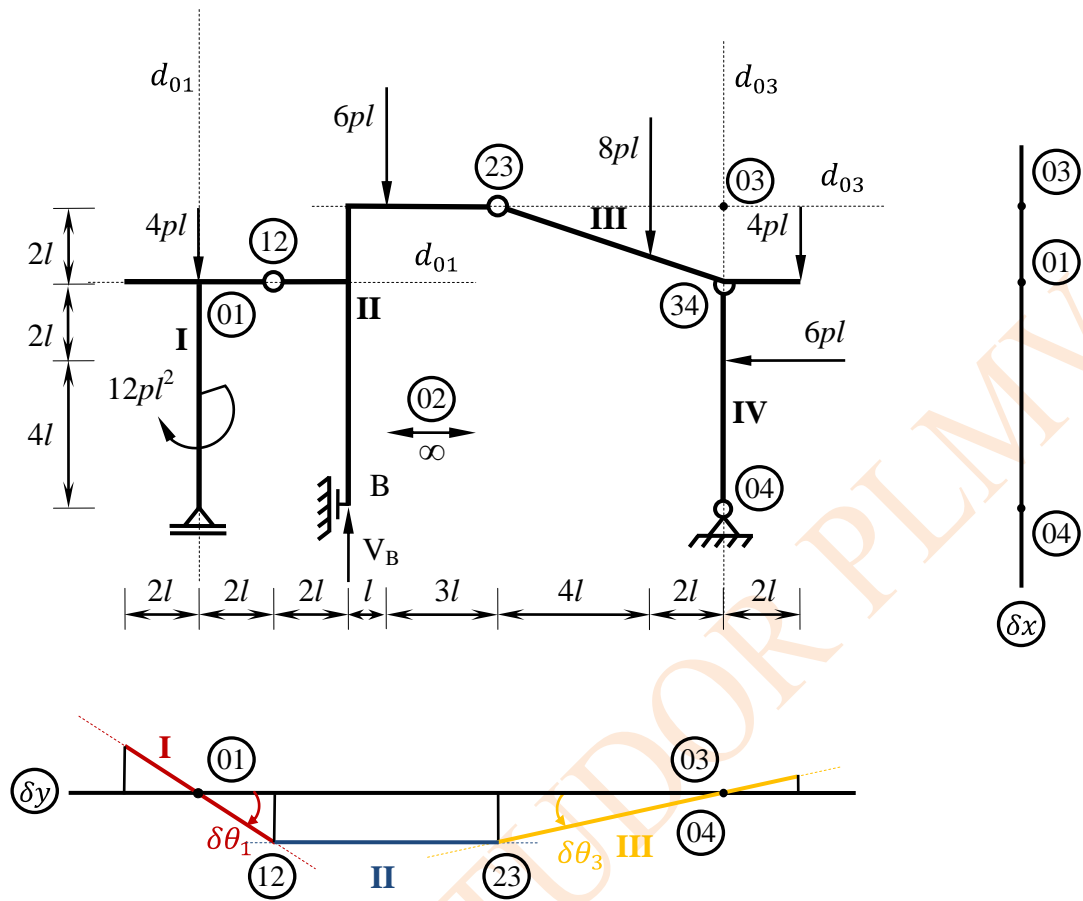
Deoarece centrul relativ de rotație (12) este un punct al corpului I, îi putem citi deplasarea virtuală verticală din această diagramă. Citirea se face în felul următor: se proiectează punctul (12) pe linia de referință și se ridică o ordonată (perpendiculară pe linia de referință) până la diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului I. Se indică această deplasare virtuală verticală. Sensul acestei deplasări este de la linia de referință către diagramă.



Se va trasa diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului II. Deoarece centrul absolut de rotație al corpului II se află la infinit, atunci diagrama sa de deplasări virtuale verticale va fi paralelă cu linia de referință a diagramei. punctul (12) este centrul relativ de rotație al corpurilor I și II (în acest punct corpurile I și II au aceeași deplasare), deci pentru corpul II se cunoaște deplasarea virtuală verticală a punctului (12). Trasând o paralelă la linia de referință prin vârful acestei deplasări cunoscute, se obține o dreaptă (linia punctată albastră), cu panta  $\delta\theta_2 = 0$ . Prin proiectarea corpului II pe această dreaptă se obține diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului II (linia plină albastră). În această diagramă se citește deplasarea virtuală verticală a centrului relativ de rotație (23).

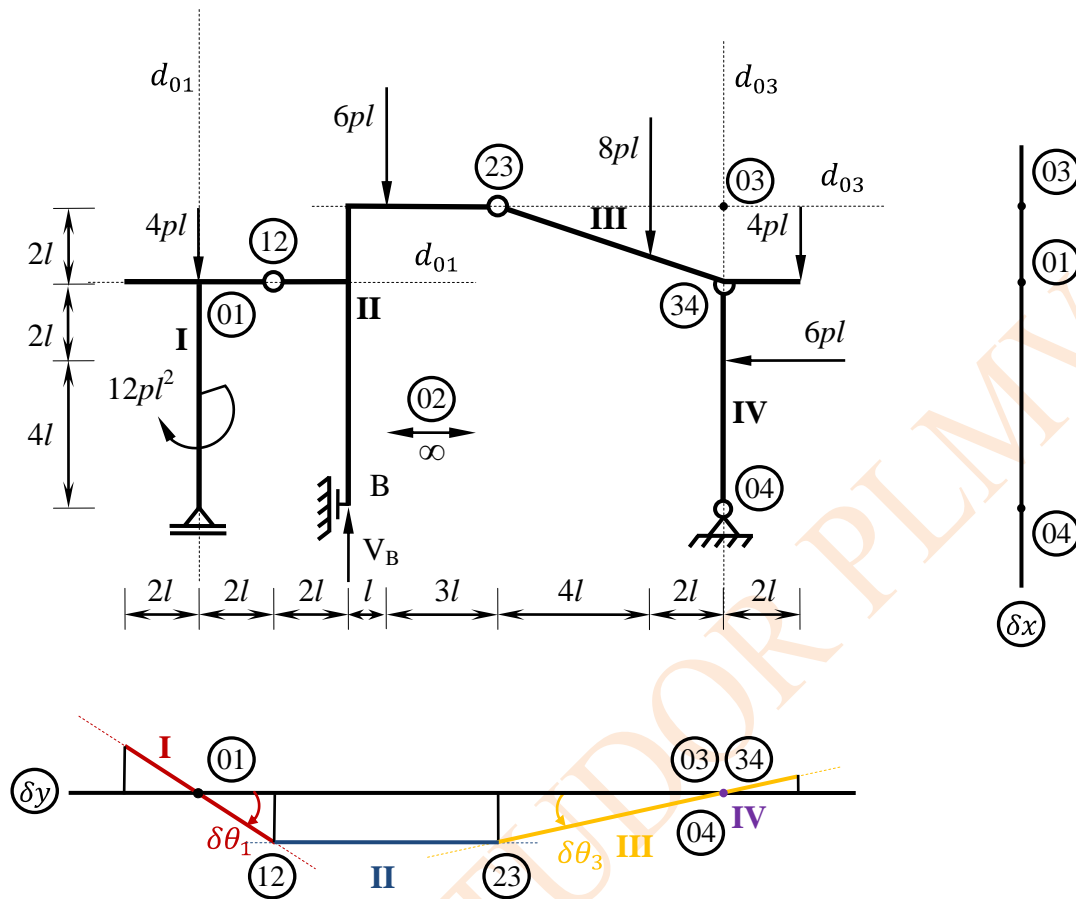


Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale verticale a corpului III se cunosc deplasările virtuale verticale ale punctelor (23) și (03). Prin vârfurile acestor deplasări se trasează dreapta de pantă  $\delta\theta_3$  (linia punctată portocalie). Prin proiectarea corpului III pe această dreaptă se obține diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului III (linia plină portocalie) și se citește deplasarea virtuală verticală a centrului relativ de rotație (34).

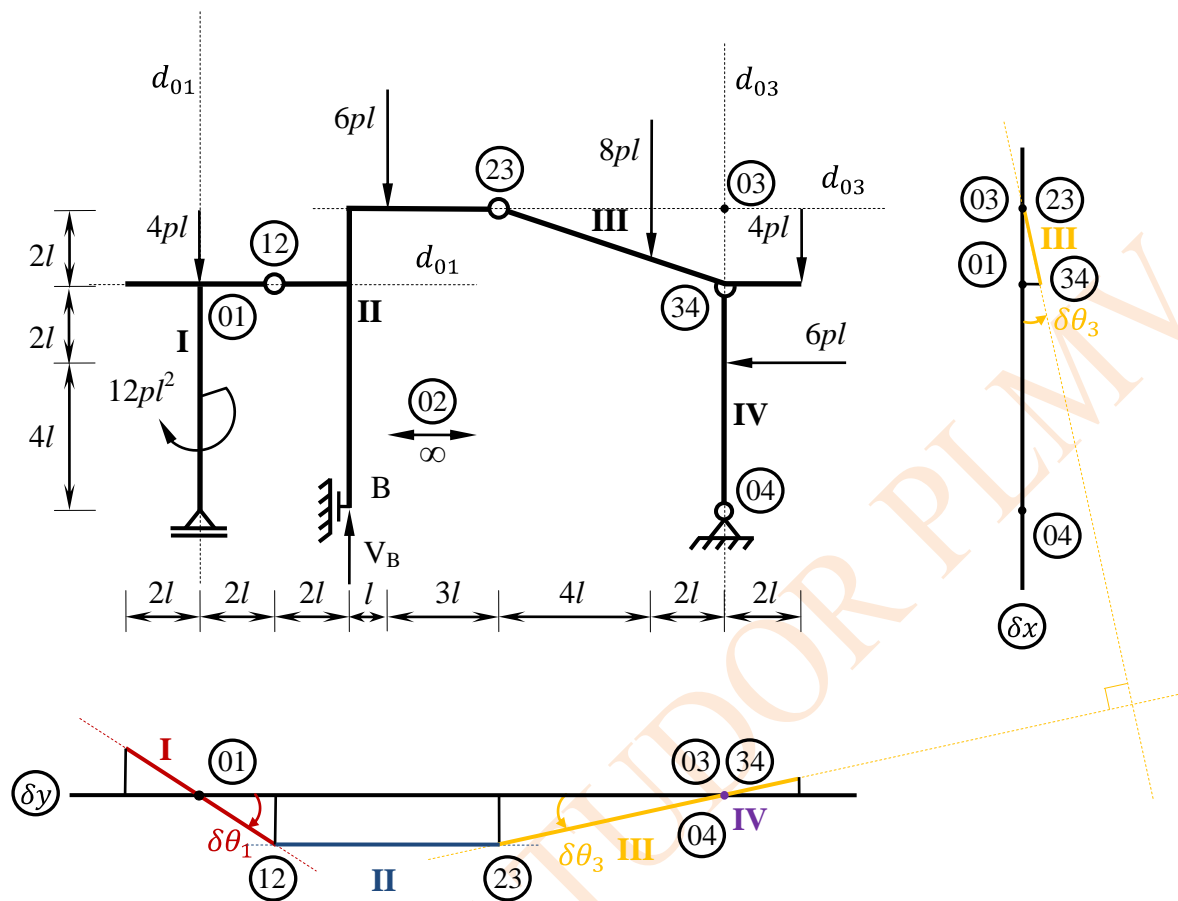


Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale verticale a corpului IV se cunosc deplasările virtuale verticale ale punctelor (34) și (04). Deoarece acestea se confundă, nu se poate trasa dreapta de pantă  $\delta \theta_4$  ce conține diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului IV. Acest fapt nu este un impediment deoarece se observă că diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului IV este un punct (toate deplasările virtuale verticale ale corpului IV sunt zero).



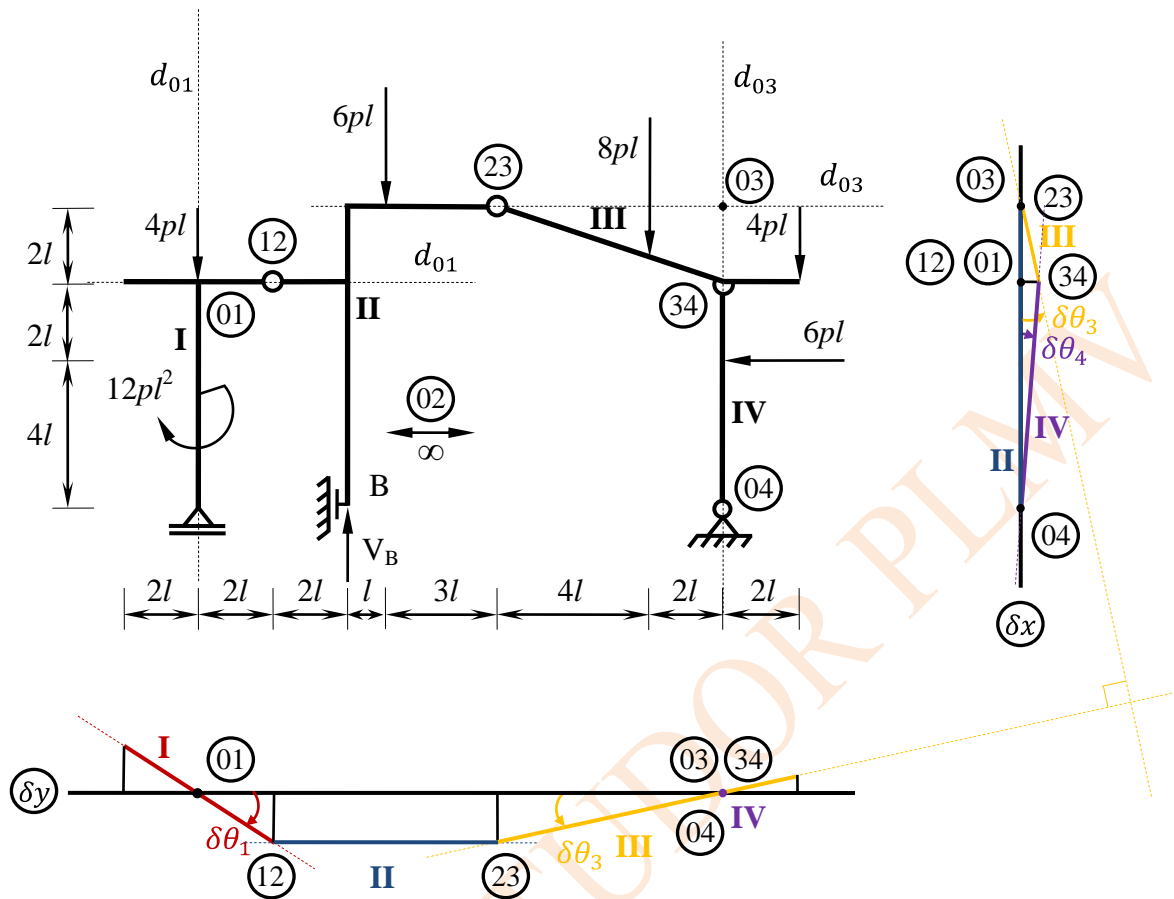


Pentru trasarea diagramelor de deplasări virtuale orizontale vom folosi inițial proprietatea de ortogonalitate a diagramelor pentru un corp al mecanismului (de exemplu corpul III). Astfel, diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului III trebuie să fie perpendiculară pe diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului III și să treacă prin proiecția centrului absolut de rotație (03) pe linia de referință a diagramelor de deplasări virtuale orizontale  $\delta x$ . Rezultă astfel o dreaptă de pantă  $\delta\theta_3$  (linia punctată portocalie). Prin proiectarea corpului III pe această dreaptă se obține diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului III. Se citesc deplasările virtuale orizontale ale centrelor relative de rotație (23) și (34) (se proiectează punctele pe linia de referință și se ridică ordonate până la diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului III). Sensul acestor deplasări este de la linia de referință la diagramă.

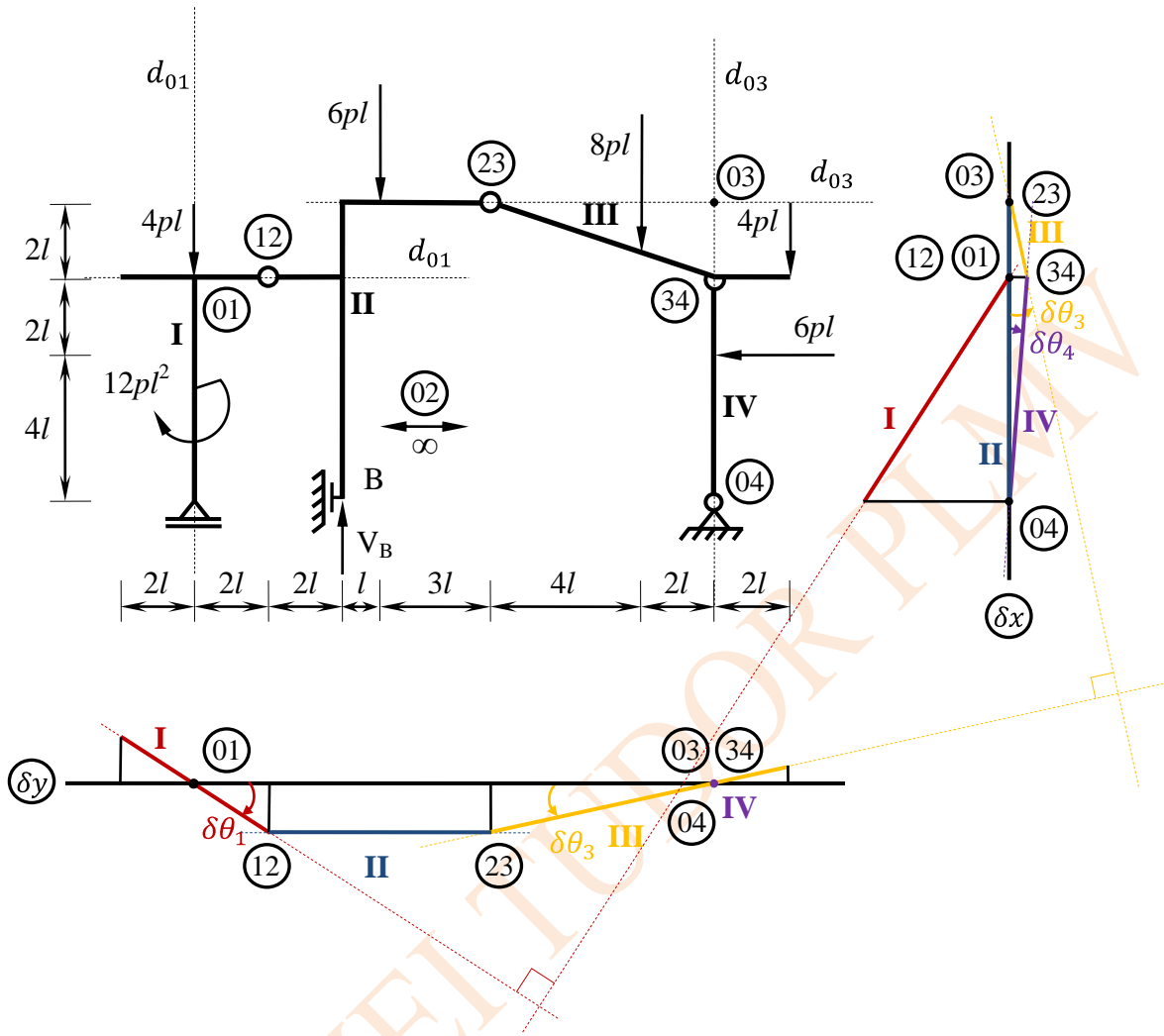


Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale a corpului IV se cunosc deplasările virtuale orizontale ale punctelor (34) și (04). Prin vârfurile acestor deplasări se trasează dreapta de pantă  $\delta\theta_4$  (linia punctată violet). Se proiectează corpul IV pe această dreaptă și se obține diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului IV (linia plină violet).

Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale a corpului II se cunoaște deplasarea virtuală orizontală a centrului relativ de rotație (23). Deoarece centrul absolut de rotație al corpului II se află la infinit, se va trasa o paralelă la linia de referință a diagramei prin vârful deplasării punctului (23). Se observă că această dreaptă se confundă cu linia de referință a diagramei. Se proiectează corpul II pe această dreaptă și se obține diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului II (linia plină albastră). Se citește pe această diagramă deplasarea virtuală orizontală a centrului relativ de rotație (12), care în acest caz este zero.



Deoarece deplasările virtuale orizontale ale punctelor (01) și (12) se confundă, nu se pot utiliza pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale orizontale a corpului I. Pentru trasarea acestei diagrame se va utiliza proprietatea de ortogonalitate a diagramelor corpului I. Astfel, se va trasa o perpendiculară pe diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului I prin proiecția centrului absolut de rotație (01) pe linia de referință a diagramei de deplasări virtuale orizontale. Se obține astfel o dreaptă de pantă  $\delta\theta_1$  (linia roșie punctată). Proiecția corpului I pe această dreaptă este diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului I (linia plină roșie).



Vom exprima rotirile virtuale ale corpurilor și deplasările virtuale ale punctelor în care acționează forțele concentrate în funcție de o rotire parametru  $\delta\theta$ .

Alegem  $\delta\theta_1 = \delta\theta$  această rotire parametru.

În diagrama de deplasări virtuale verticale  $\delta y$ , deplasările virtuale ale punctelor (12) și (23) sunt egale (diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului II este un dreptunghi). Aceste deplasări se determină utilizând diagramele de deplasări virtuale verticale ale corpului I, respectiv III:

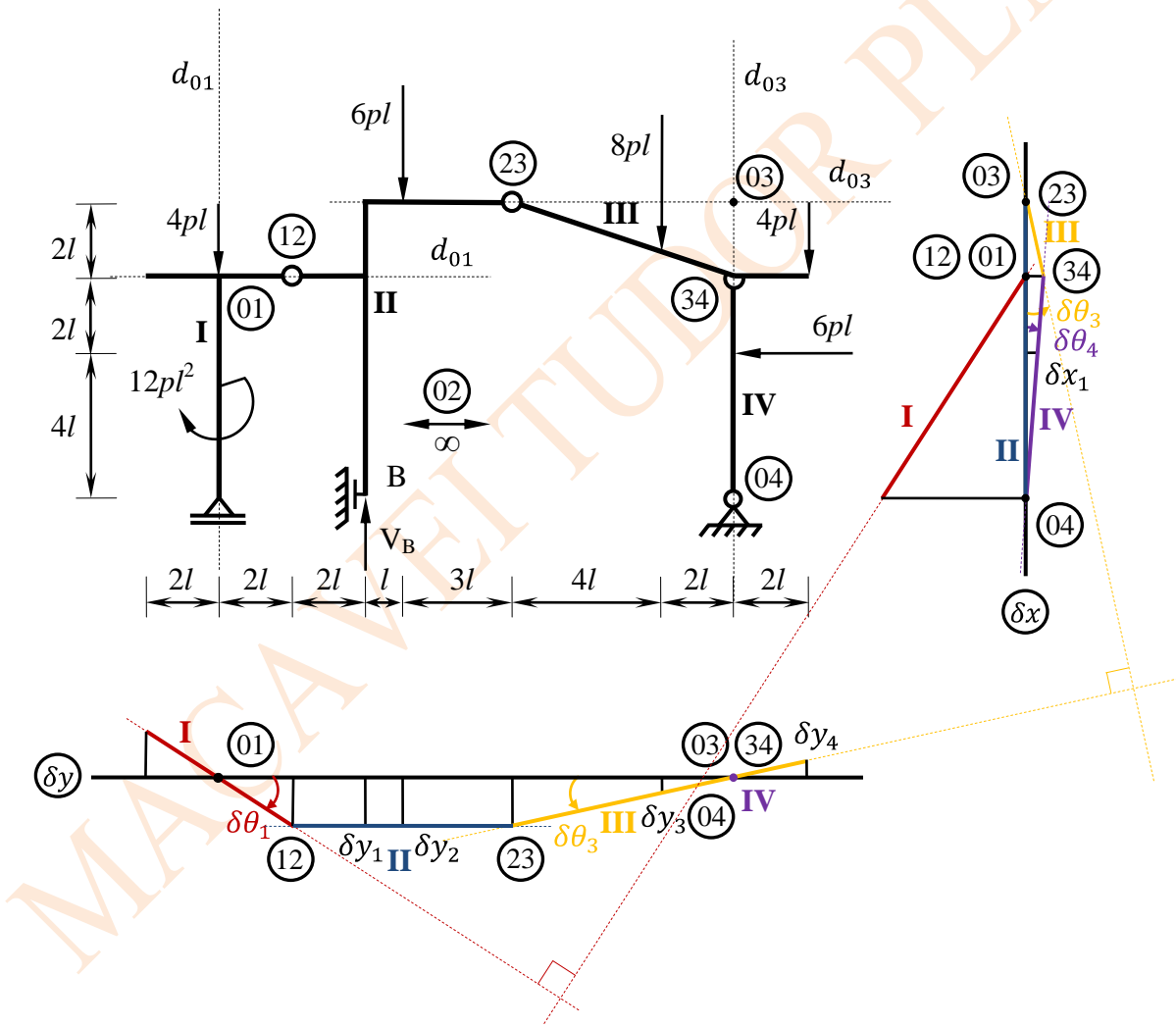
$$\begin{aligned} \delta y_{(12)} &= 2l \cdot \delta\theta_1 = 2l\delta\theta \\ \delta y_{(23)} &= 6l \cdot \delta\theta_3 \end{aligned} \Rightarrow 2l \cdot \delta\theta = 6l \cdot \delta\theta_3 \Rightarrow \delta\theta_3 = \frac{1}{3}\delta\theta$$

Din diagrama de deplasări virtuale orizontale  $\delta x$  se determină deplasarea virtuală orizontală a punctului (34) utilizând atât diagrama corpului III cât și diagrama corpului IV.

$$\begin{aligned} \delta x_{(34)}^{III} &= 2l \cdot \delta\theta_3 \\ \delta x_{(34)}^{IV} &= 6l \cdot \delta\theta_4 \end{aligned} \Rightarrow 2l \cdot \delta\theta_3 = 6l \cdot \delta\theta_4 \Rightarrow \delta\theta_4 = \frac{1}{3}\delta\theta_3 = \frac{1}{9}\delta\theta$$

Se vor citi și se vor determina deplasările virtuale ale punctelor de aplicație ale forțelor concentrate:

- deplasarea virtuală orizontală a punctului de aplicație al forței orizontale  $6pl$ , notată cu  $\delta x_1$ ;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale  $4pl$  este zero;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al reacțiunii verticale  $V_B$ , notată cu  $\delta y_1$ ;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale  $6pl$ , notată cu  $\delta y_2$ ;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale  $8pl$ , notată cu  $\delta y_3$ ;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale  $4pl$ , notată cu  $\delta y_4$ .



$$\delta x_1 = 4l \cdot \delta \theta_4 = 4l \cdot \frac{1}{9} \delta \theta = \frac{4}{9} l \cdot \delta \theta$$

$$\delta y_1 = \delta y_{12} = 2l \cdot \delta \theta_1 = 2l \cdot \delta \theta$$

$$\delta y_2 = \delta y_{12} = 2l \cdot \delta \theta_1 = 2l \cdot \delta \theta$$

$$\delta y_3 = 2l \cdot \delta \theta_3 = 2l \cdot \frac{1}{3} \delta \theta = \frac{2}{3} l \cdot \delta \theta$$

$$\delta y_4 = 2l \cdot \delta \theta_3 = 2l \cdot \frac{1}{3} \delta \theta = \frac{2}{3} l \cdot \delta \theta$$

Se aplică principiul lucrului mecanic virtual:

$$\delta L = 0$$

O forță produce lucru mecanic pozitiv (semn +) dacă deplasarea punctului său de aplicație este în sensul forței; Un moment concentrat produce lucru mecanic pozitiv (semn +) dacă efectul de rotire al momentului este în același sens cu rotirea corpului pe care acționează.

Astfel:

$$-6pl \cdot \delta x_1 + 4pl \cdot 0 - V_B \cdot \delta y_1 + 6pl \cdot \delta y_2 + 8pl \cdot \delta y_3 - 4pl \cdot \delta y_4 + 12pl^2 \cdot \delta \theta_1 = 0$$

$$-6pl \cdot \frac{4}{9} l \cdot \delta \theta + 0 - V_B \cdot 2l \cdot \delta \theta + 6pl \cdot 2l \cdot \delta \theta + 8pl \cdot \frac{2}{3} l \cdot \delta \theta - 4pl \cdot \frac{2}{3} l \cdot \delta \theta + 12pl^2 \cdot \delta \theta = 0$$

Se împarte ecuația la  $l \cdot \delta \theta$ . Rezultă:

$$V_B = 12pl$$