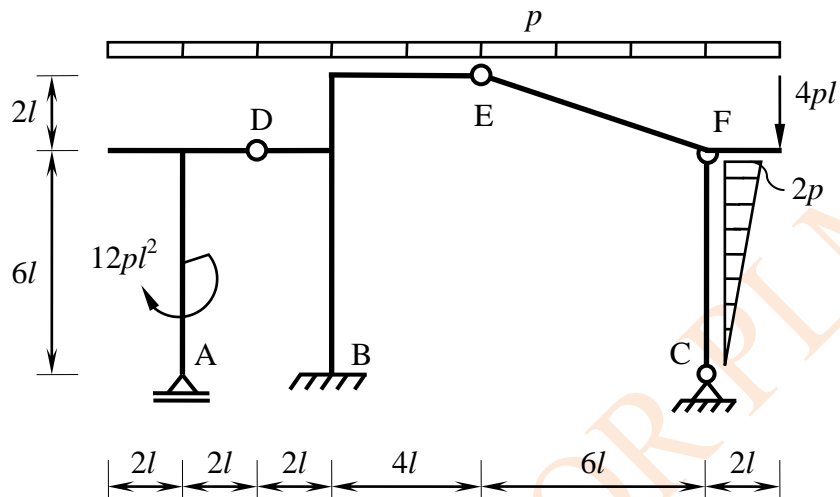


APLICAȚIA 1.1

Utilizând principiul lucrului mecanic virtual determinați momentul concentrat din încastrare.



Înainte de rezolvarea acestei aplicații trebuie să cunoaștem următoarele:

Pentru sistemele plane, expresia lucrului mecanic virtual este:

$$\delta L = \sum \pm X_i \cdot \delta x_i + \sum \pm Y_i \cdot \delta y_i + \sum \pm M_i \cdot \delta \theta_i, \text{ unde}$$

- X_i este forța concentrată orizontală i ;
- δx_i este deplasarea virtuală orizontală a punctului de aplicație al forței concentrate X_i ;
- Y_i este forța concentrată verticală i ;
- δy_i este deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței concentrate Y_i ;
- M_i este momentul concentrat i ;
- $\delta \theta_i$ este rotirea virtuală a corpului pe care acționează momentul concentrat M_i .

Astfel, expresia principiului lucrului mecanic virtual pentru starea de echilibru devine (pentru sistemele plane):

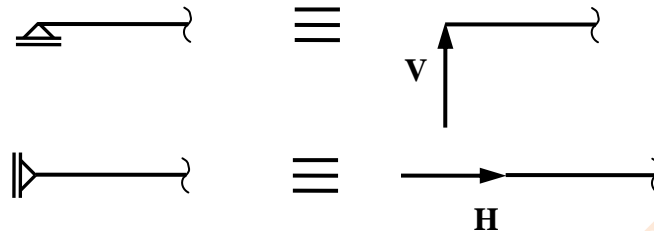
$$\delta L = \sum \pm X_i \cdot \delta x_i + \sum \pm Y_i \cdot \delta y_i + \sum \pm M_i \cdot \delta \theta_i = 0$$

Pentru sistemele static determinate principiul lucrului mecanic virtual pentru starea de repaus este îndeplinit automat (deplasările virtuale fiind compatibile cu legăturile sunt întotdeauna zero). Prin transformarea sistemului static determinat într-un mecanism cu un grad de libertate se poate imagina un set de deplasări virtuale. Această transformare presupune înlocuirea unei legături simple cu reacțiunea corespunzătoare. Deoarece și mecanismul astfel

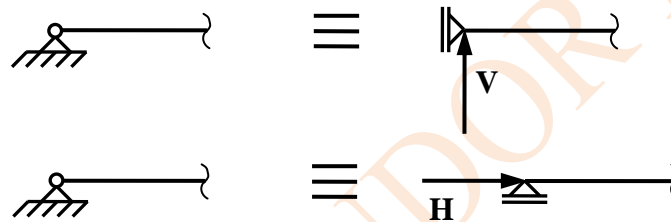
format trebuie să fie în repaus, se poate aplica principiul lucrului mecanic virtual pentru starea de repaus, rezultând astfel o ecuație scalară din care se determină acea reacțiune.

Înlocuirea unei legături simple cu reacțiunea corespunzătoare se face în felul următor:

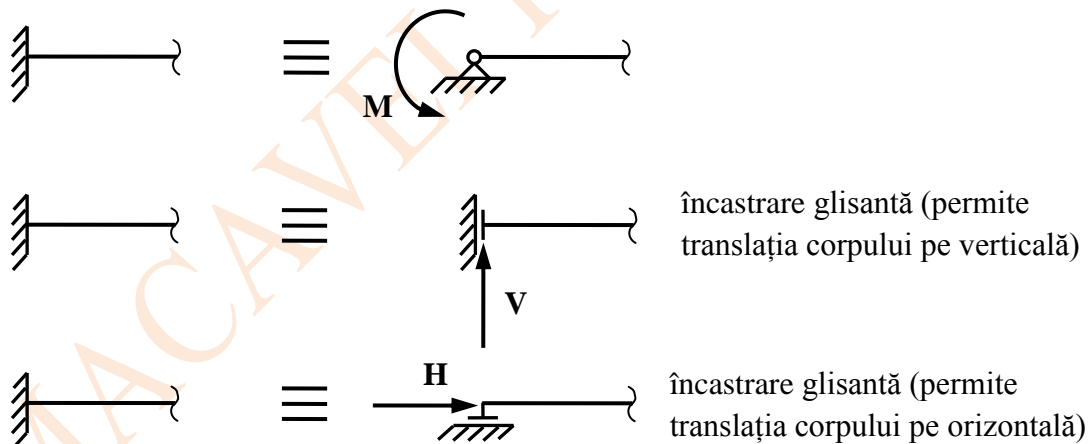
- un reazem simplu se va înlocui cu reacțiunea corespunzătoare:



- pentru un reazem articulat (articulație), în funcție de reacțiunea căutată rezultă:



- pentru un reazem încastrat (încăstrare), în funcție de reacțiunea căutată rezultă:



În urma transformării sistemului static determinat într-un mecanism, se poate ca unele corpuri să rămână imobilizate. Acestea se elimină din mecanism deoarece deplasările virtuale aferente sunt nule. Situațiile în care avem asemenea corpuri fixe sunt:

- un corp legat cu o încăstrare;
- un corp legat cu o articulație fixă și un reazem simplu (direcția reazemului simplu nu trece prin articulație);

- un corp legat cu trei reazeme simple (direcțiile celor trei reazeme nu sunt toate trei paralele sau toate trei concurente în același punct);
- două corpuri legate cu două articulații fixe și cu o articulație intermediară (cele trei articulații nu sunt concurente).

Deplasările și rotațiile virtuale se determină trasând diagrame de deplasări virtuale pe două direcții convenabile, de regulă orizontală și verticală. Pentru trasarea acestor diagrame este nevoie să determinăm centre de rotație (absolute și relative).

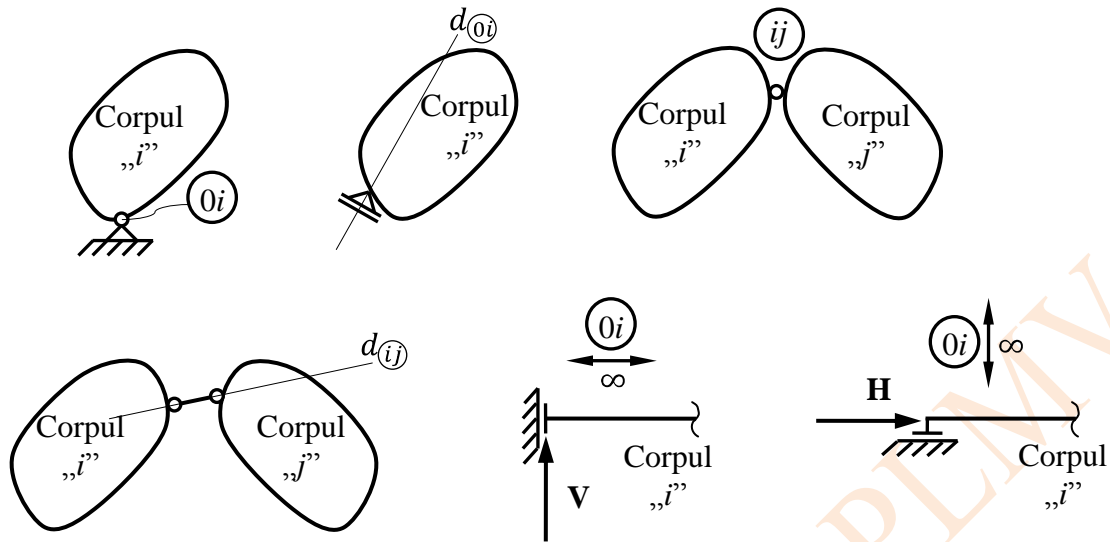
Se numește centru absolut de rotație al corpului „ i ” din mecanism, notat $(0i)$, un punct cu viteza (respectiv deplasarea) zero pentru corpul „ i ”.

Se numește centru relativ de rotație al corpurilor „ i ” și „ j ” din mecanism, notat (ij) , punctul în care vitezele (respectiv deplasările) corpurilor „ i ” și „ j ” sunt egale.

Determinarea poziției centrelor de rotație se face utilizând informații date de legături și aplicând teoremele de coliniaritate:

- o articulație fixă este centrul absolut de rotație al corpului pe care se află articulația fixă;
- pe direcția unui reazem simplu se află centrul absolut de rotație al corpului pe care se află acel reazem simplu;
- o articulație intermediară simplă este centrul relativ de rotație al corpurilor legate de acea articulație intermediară simplă;
- pe direcția unei legături intermediare simple (pendul) se află centrul relativ de rotație al corpurilor legate de acea legătură intermediară simplă;
- dacă un corp are ca legătură o încastrare glisantă atunci centrul său absolut de rotație se află la infinit pe direcție perpendiculară pe direcția translației permise de acea încastrare glisantă;
- teoremele de coliniaritate se pot exprima sub forma regulii indicilor (Szolga V., Szolga A. M., „Mecanică teoretică: note de curs și îndrumător de seminar” partea 2, București, Conspress, 2003, pg 63): dacă două centre de rotație au un indice comun atunci pe dreapta ce trece prin cele două centre de rotație se află centrul corespunzător indicilor necomuni ai celor două centre.

Pentru sistemele de corpuri care au ca legături intermediare articulații, este suficient să se determine pozițiile tuturor centrelor absolute de rotație și doar pozițiile centrelor relative de rotație din articulațiile intermediare.



Pentru trasarea diagramelor de deplasări virtuale trebuie să ținem cont de următoarele proprietăți:

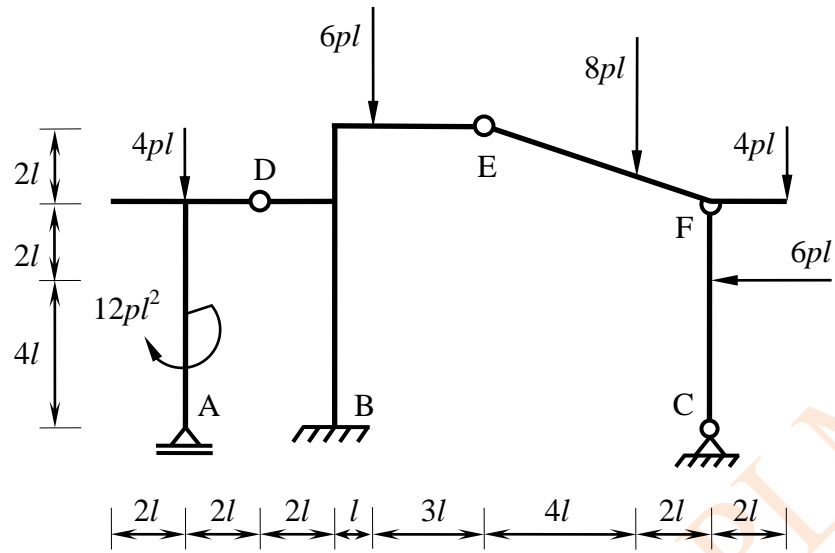
- pentru un corp, diagramele de deplasări virtuale sunt linii drepte ce conțin proiecțiile pe liniile de referință ale centrului absolut de rotație al corpului; panta diagramelor este chiar rotirea virtuală a corpului $\delta\theta$;
- în proiecții ortogonale, diagramele de deplasări virtuale ale unui corp sunt ortogonale;
- dacă centrul absolut de rotație al unui corp rezultă la infinit, atunci diagramele de deplasări virtuale corespunzătoare acestuia sunt paralele sau se vor confunda cu liniile de referință;
- dacă centrul relativ de rotație a două corpuri rezultă la infinit atunci diagramele de deplasări virtuale ale celor două corpuri vor fi paralele sau se vor confunda.

Observații suplimentare:

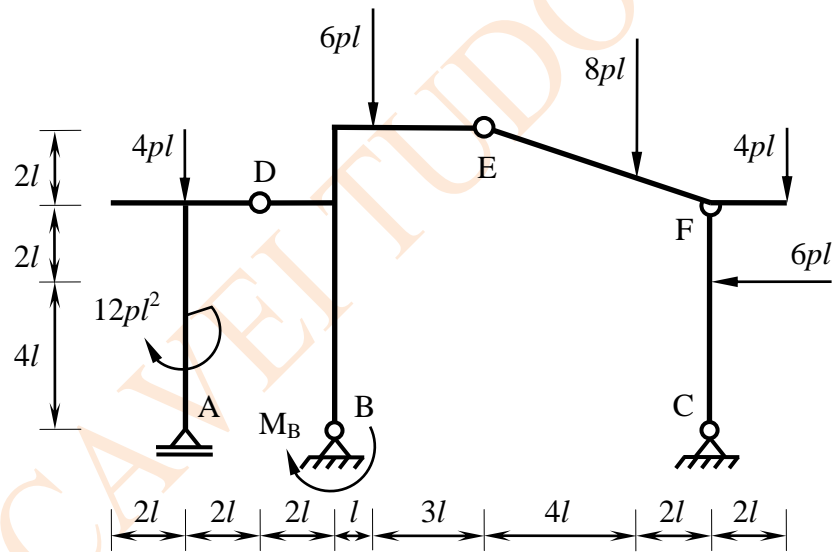
- dacă într-un punct rezultă un centru absolut de rotație și un centru relativ de rotație de indice comun, atunci tot în acel punct se află și centrul absolut de rotație de indici necomuni;
- dacă pentru un corp al unui mecanism plan se determină două centre absolute de rotație disjuncte atunci acel corp este fix.

Rezolvarea aplicației

Se verifică dacă sistemul de corpuri este static determinat și se aranjează încărcările pe fiecare corp, ca și când am izola corpurile.



Vom transforma sistemul de corpuri static determinat într-un mecanism cu un grad de libertate.



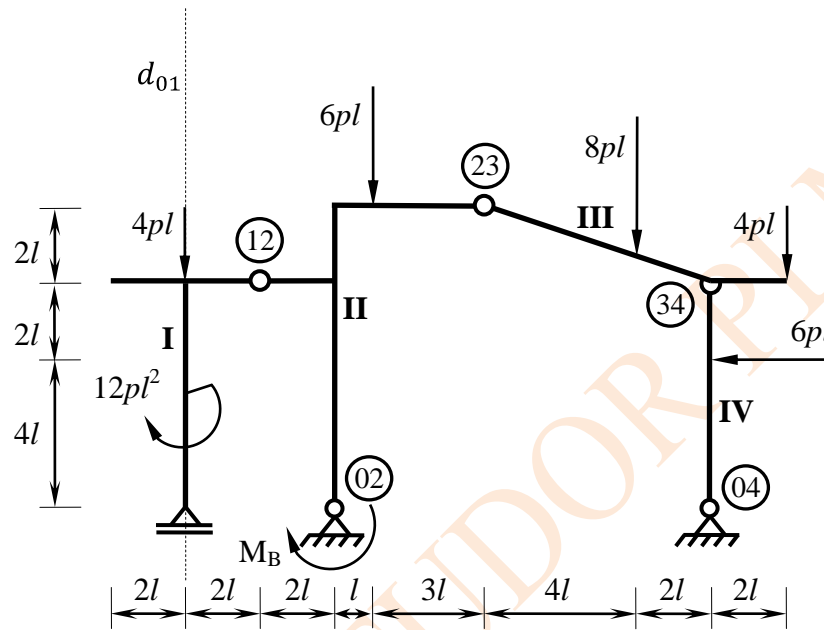
Sensul inițial al reacțiunii M_B a fost ales aleator. Rezolvarea acestei reacțiuni ne va spune dacă sensul ales inițial este corect sau nu.

Se identifică corpurile fixe din mecanism. Se observă că nu există (la prima vedere) corpuri fixe. Se numerează corpurile din mecanism (aici 4).

Se determină pozițiile centrelor de rotație date de legăturile mecanismului. Astfel:

- în punctele B și C sunt două articulații fixe (articulații exterioare); aici vor fi centrele absolute de rotație ale corpurilor II și IV ((02) respectiv (04));

- în punctele D, E și F sunt articulații intermediare simple; aici se află atunci centrele relative de rotație (12), (23) respectiv (34);
- în punctul A se află un reazem simplu vertical; pe direcția reazemului simplu (verticala ce trece prin punctul A) se va afla centrul absolut de rotație al corpului I, (01); această dreaptă se va nota cu d_{01} .



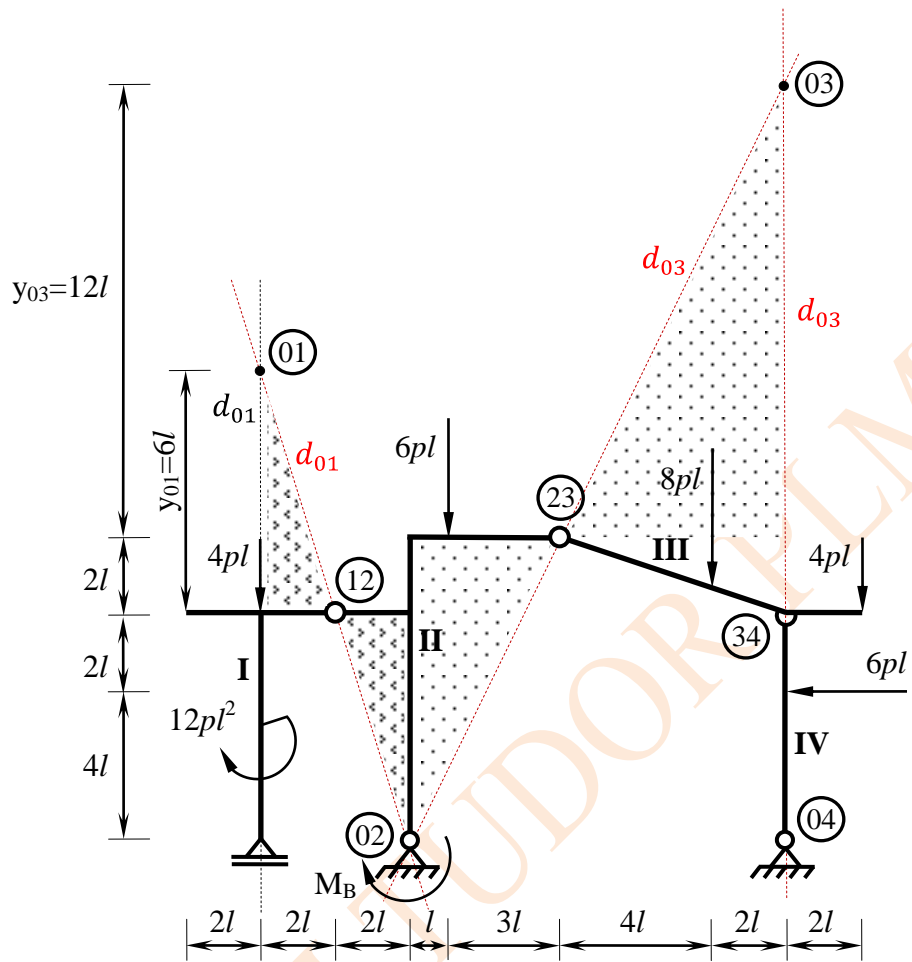
Se determină celelalte centre de rotație necesare ((01), (03)) aplicând regula indicilor.

Astfel:

- pe dreapta ce conține centrele de rotație (02) și (12) se află și centrul de rotație (01); aceasta se notează cu d_{01} ;
- pe dreapta ce conține centrele de rotație (02) și (23) se află și centrul de rotație (03); aceasta se notează cu d_{03} ;
- pe dreapta ce conține centrele de rotație (04) și (34) se află și centrul de rotație (03); aceasta se notează tot cu d_{03} ;
- la intersecțiile dreptelor ce conțin aceleași centre de rotație se află acele centre de rotație ((01) respectiv (03)); pozițiile acestora se determină din asemănarea triunghiurilor hașurate, astfel:

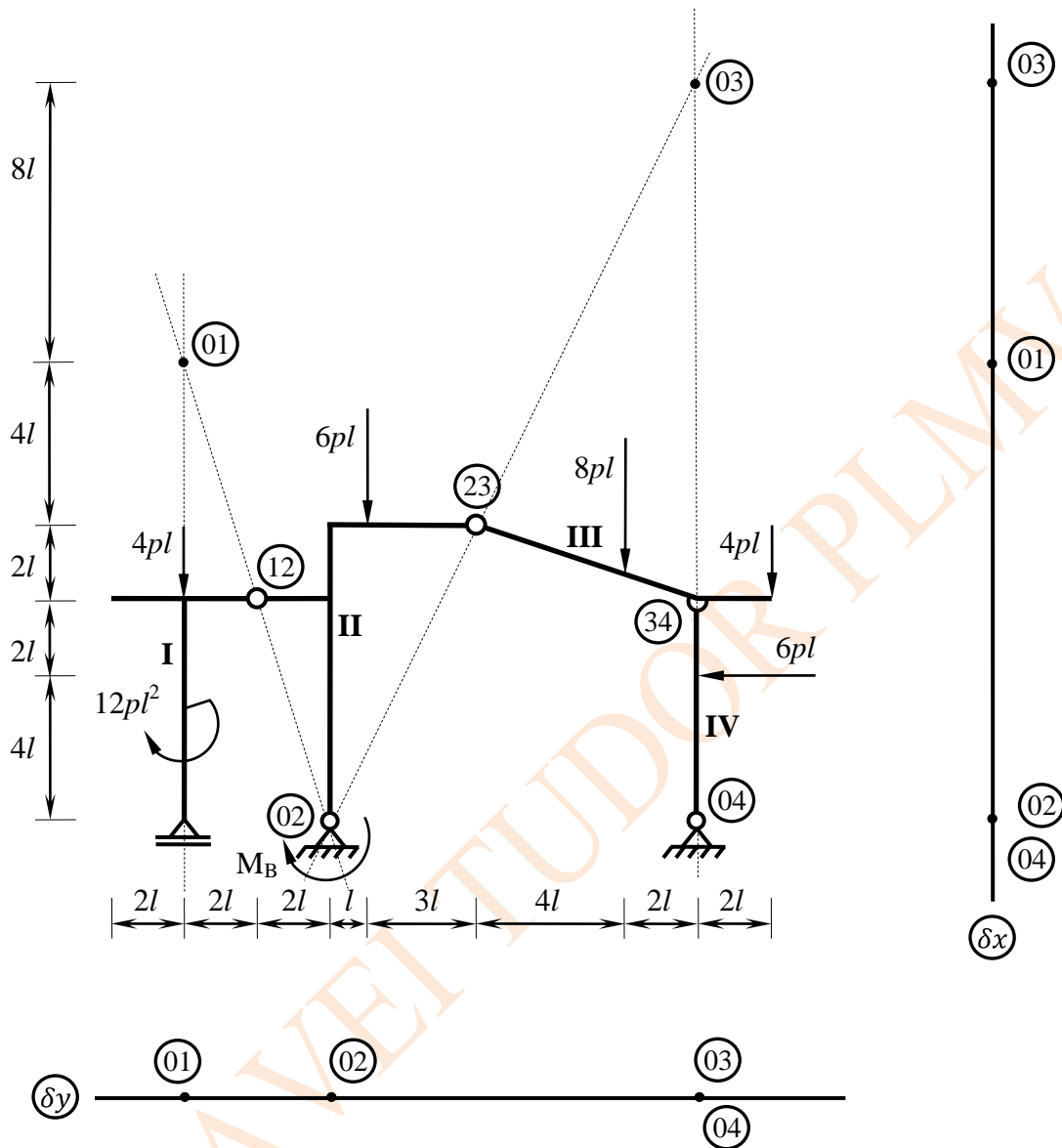
$$\frac{y_{01}}{6l} = \frac{2l}{2l} \Rightarrow y_{01} = \frac{6l \cdot 2l}{2l} = 6l$$

$$\frac{y_{03}}{8l} = \frac{6l}{4l} \Rightarrow y_{03} = \frac{8l \cdot 6l}{4l} = 12l$$



Trasarea diagramelor de deplasări virtuale.

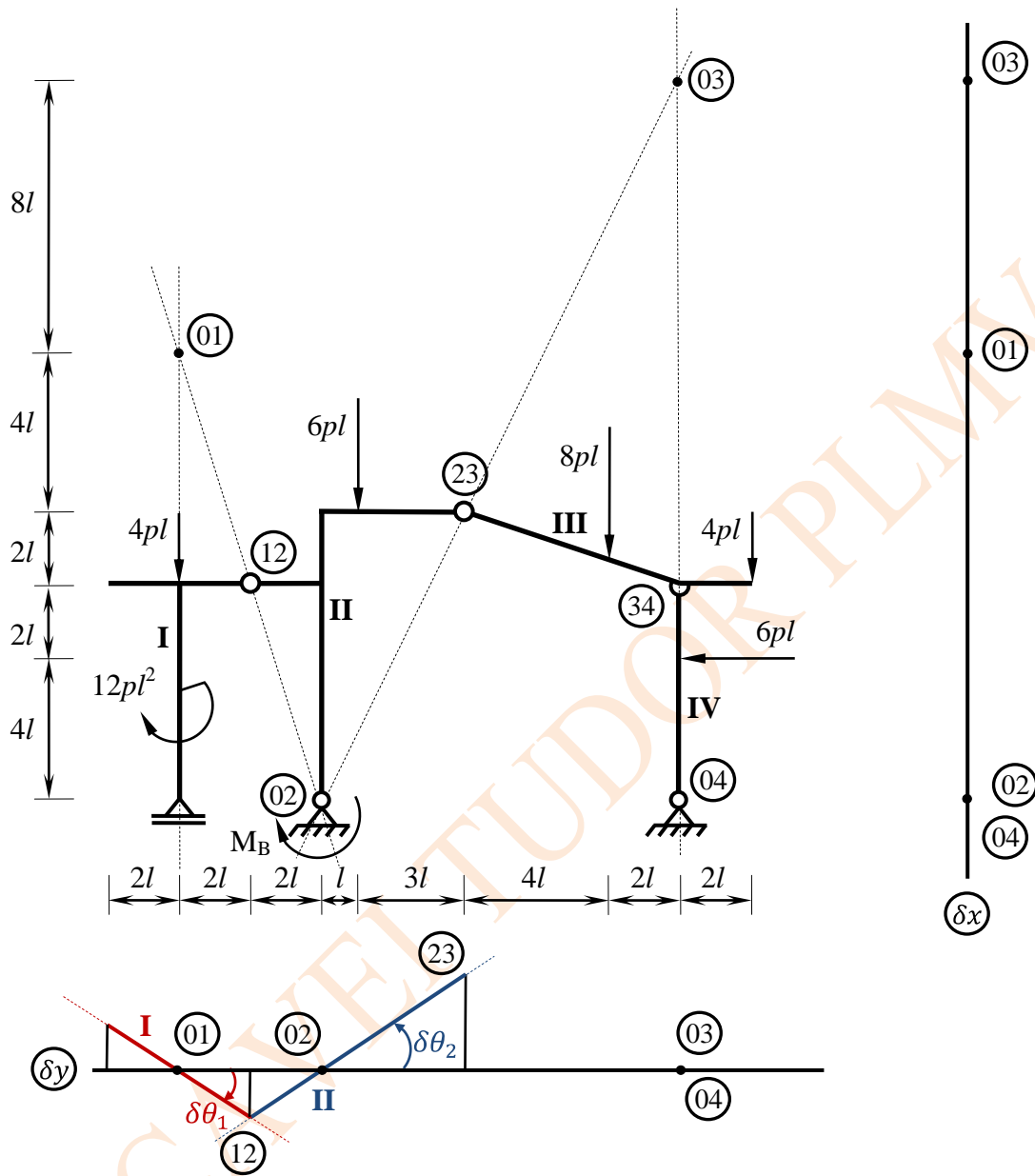
Se trasează liniile de referință ale diagramelor și se proiectează pe acestea centrele absolute de rotație. Într-o diagramă vom citi deplasări virtuale orizontale δx iar în cealaltă vom citi deplasările virtuale verticale δy .



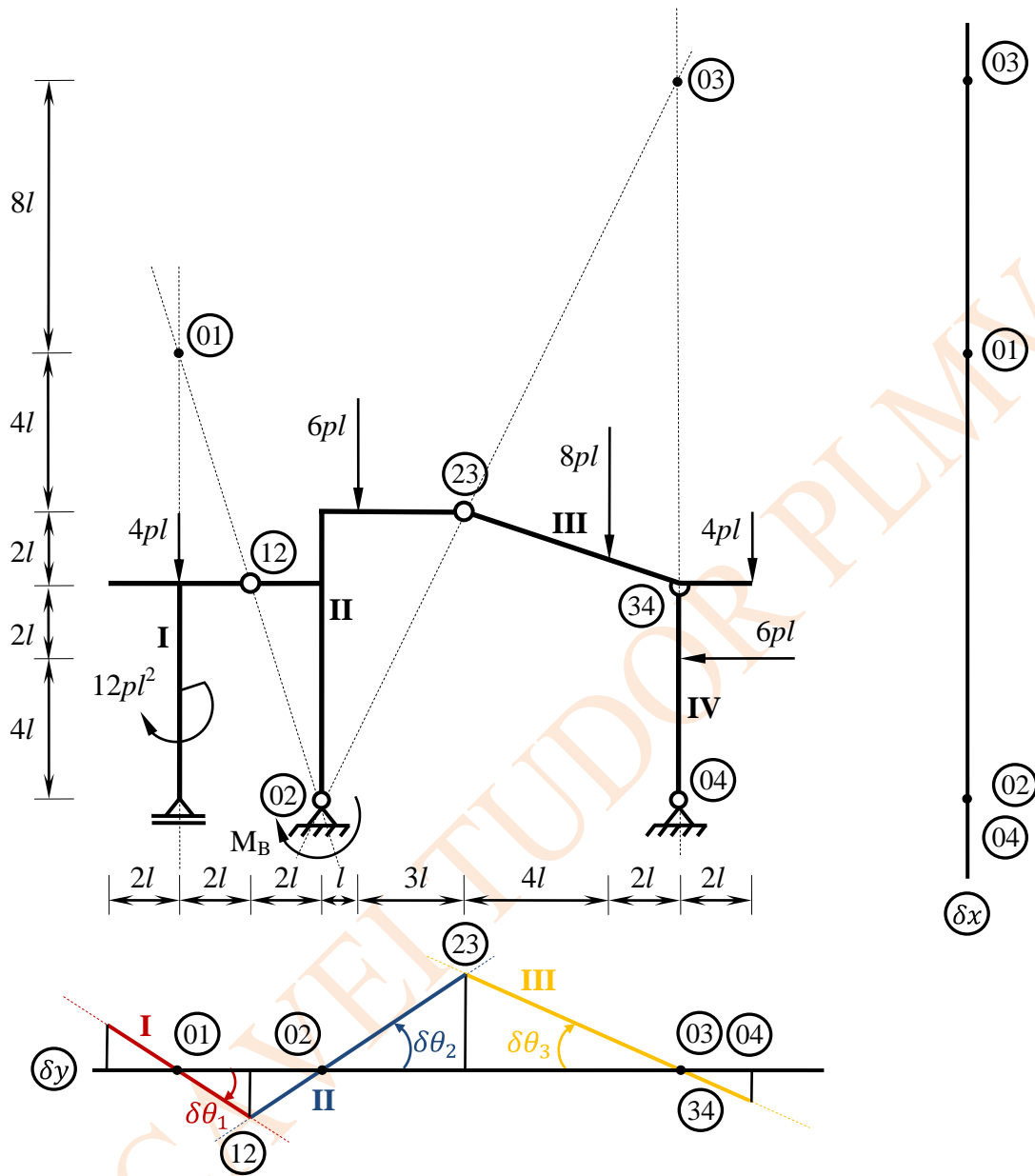
Vom începe cu trasarea diagramelor de deplasări virtuale verticale. Pentru aceasta vom da o rotire virtuală unuia dintre corpuri (de exemplu corpul I) în ce sens dorim.

Rezultă o dreaptă de pantă $\delta\theta_1$ ce trece prin proiecția centrului absolut de rotație (01) pe linia de referință a diagramei δy . Prin proiectarea corpului I pe această dreaptă se determină diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului I. Rotirea virtuală a corpului va avea sensul unghiului măsurat de la linia de referință la diagramă pe drumul cel mai scurt.

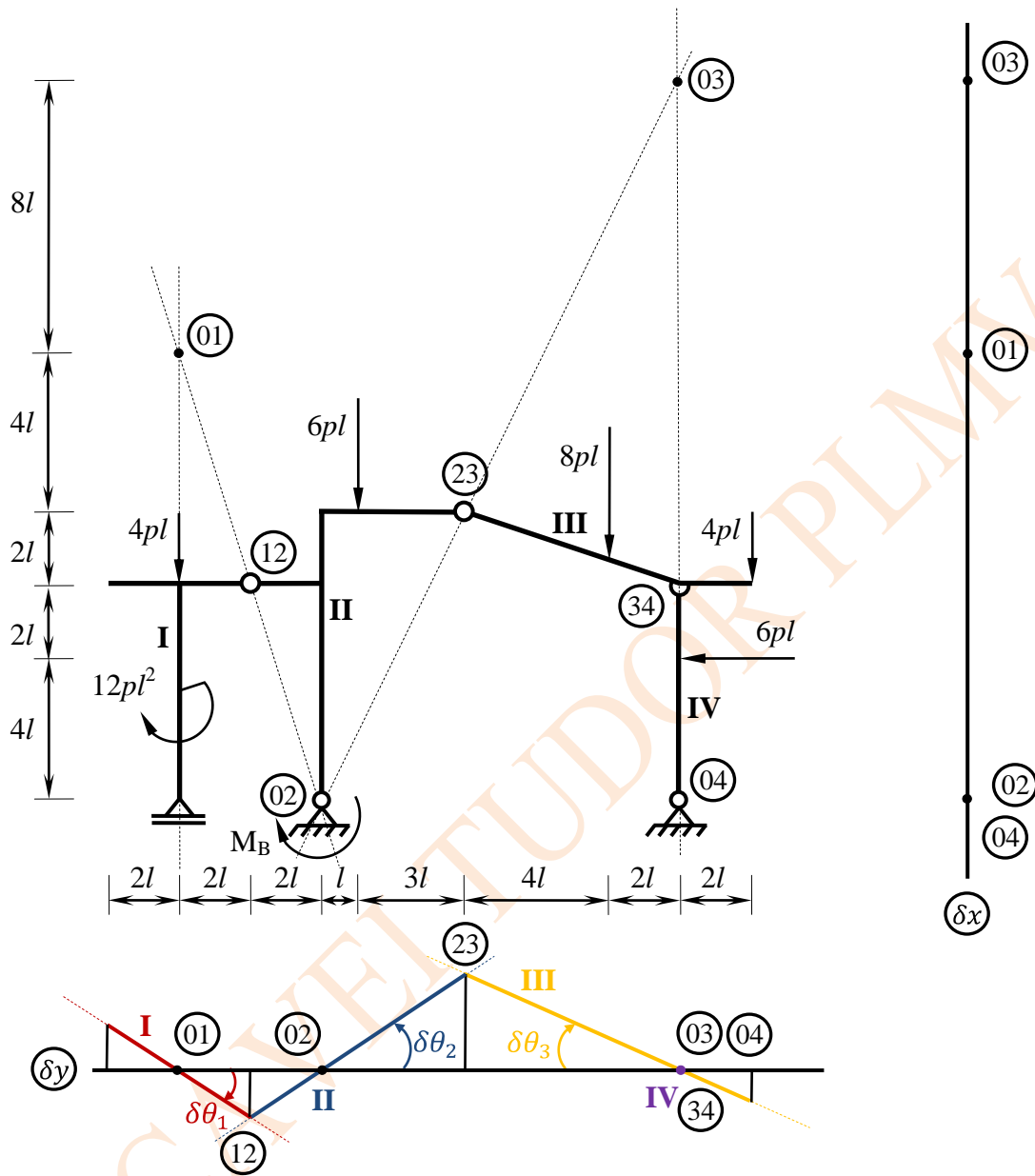
Deoarece centrul relativ de rotație (12) este un punct al corpului I, îi putem citi deplasarea virtuală verticală din această diagramă. Citirea se face în felul următor: se proiectează punctul (12) pe linia de referință și se ridică o ordonată (perpendiculară pe linia de referință) până la diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului I. Se indică această deplasare virtuală verticală. Sensul acestei deplasări este de la linia de referință către diagramă.



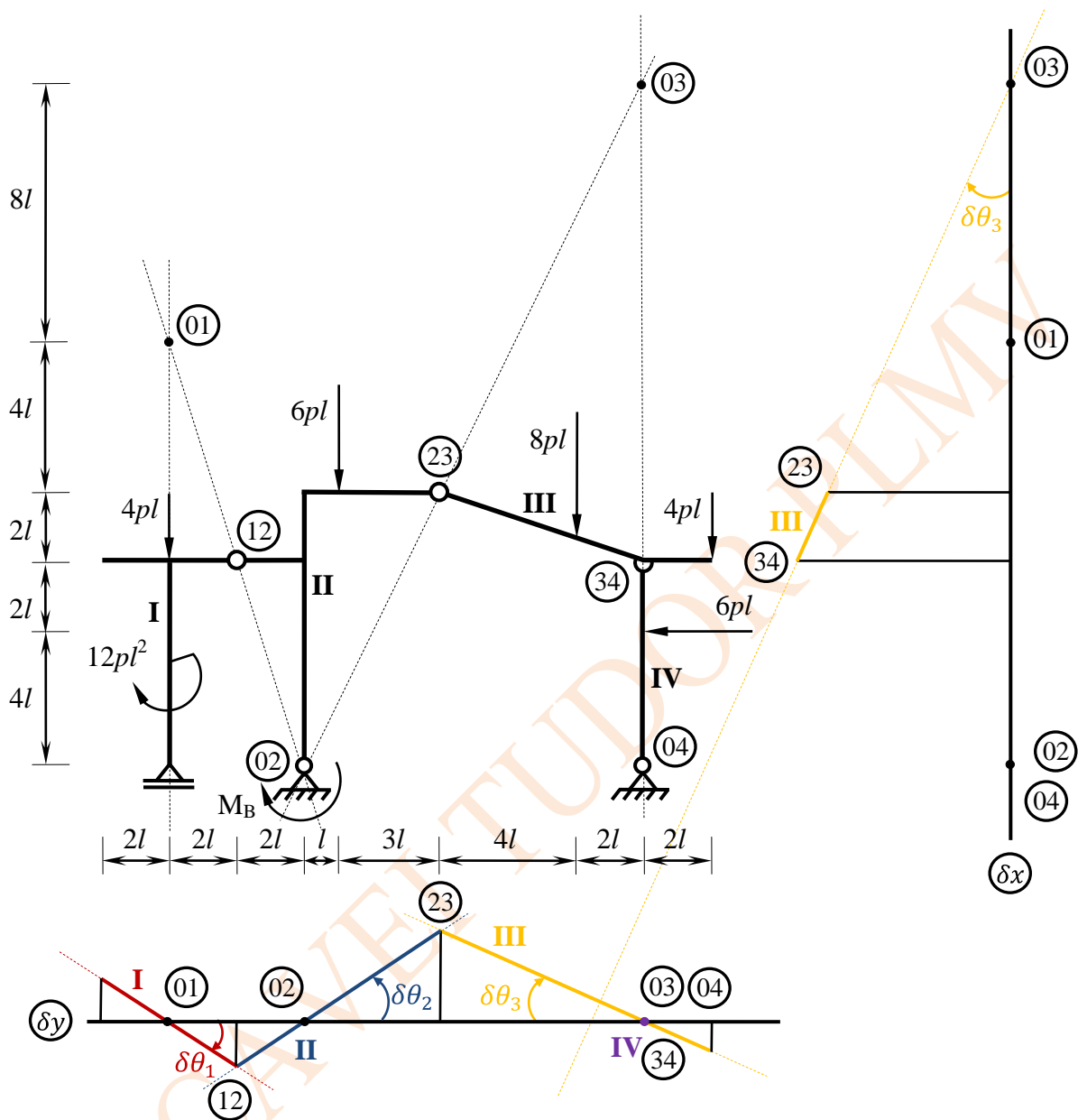
Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale verticale a corpului III se cunosc deplasările virtuale verticale ale punctelor (23) și (03). Prin vârfurile acestor deplasări se trasează dreapta de pantă $\delta\theta_3$ (linia punctată portocalie). Prin proiectarea corpului III se obține diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului III (linia plină portocalie) și se citește deplasarea virtuală verticală a centrului relativ de rotație (34).



Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale verticale a corpului IV se cunosc deplasările virtuale verticale ale punctelor (34) și (04). Deoarece acestea se confundă, nu se poate trasa dreapta de pantă $\delta\theta_4$ ce conține diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului IV. Acest fapt nu este un impediment deoarece se observă că diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului IV este un punct (toate deplasările virtuale verticale ale corpului IV sunt zero).

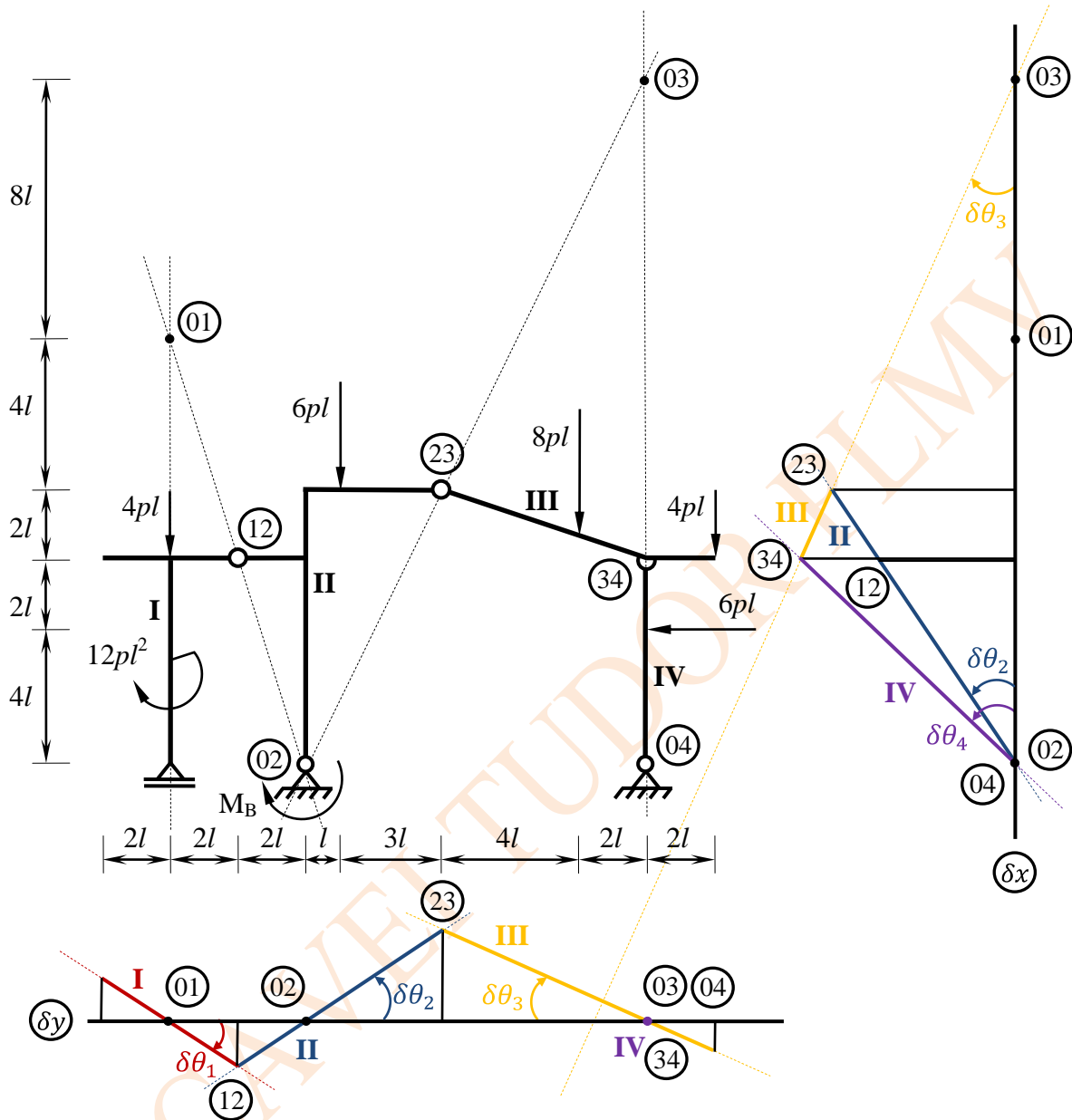


Pentru trasarea diagramelor de deplasări virtuale orizontale vom folosi inițial proprietatea de ortogonalitate a diagramelor pentru un corp al mecanismului (de exemplu corpul III). Astfel, diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului III trebuie să fie perpendiculară pe diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului III și să treacă prin proiecția centrului absolut de rotație (03) pe linia de referință a diagramelor de deplasări virtuale orizontale δx . Rezultă astfel o dreaptă de pantă $\delta \theta_3$ (linia punctată portocalie). Prin proiectarea corpului III pe această dreaptă se obține diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului III. Se citesc deplasările virtuale orizontale ale centrelor relative de rotație (23) și (34) (se proiectează punctele pe linia de referință și se ridică orizontale până la diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului III). Sensul acestor deplasări este de la linia de referință la diagramă.



Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale a corpului IV se cunosc deplasările virtuale orizontale ale punctelor (34) și (04). Prin vârfurile acestor deplasări se trasează dreapta de pantă $\delta\theta_4$ (linia punctată violet). Se proiectează corpul IV pe această dreaptă și se obține diagramele de deplasări virtuale orizontale a corpului IV (linia plină violet).

Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale a corpului II se cunosc deplasările virtuale orizontale ale punctelor (23) și (03). Prin vârfurile acestor deplasări se trasează dreapta de pantă $\delta\theta_2$ (linia punctată albastră). Se proiectează corpul II pe această dreaptă și se obține diagramele de deplasări virtuale orizontale a corpului II (linia plină albastră). Se citește în această diagramă deplasarea virtuală orizontală a centrului relativ de rotație (12).



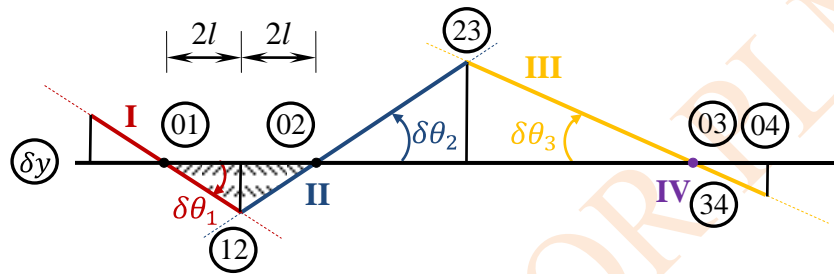
Pentru trasarea diagramei de deplasări virtuale a corpului I se cunosc deplasările virtuale orizontale ale punctelor (12) și (01). Prin vârfurile acestor deplasări se trasează dreapta de pantă $\delta\theta_1$ (linia punctată roșie). Se proiectează corpul I pe această dreaptă și se obține diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului I (linia plină roșie).

Vom exprima rotirile virtuale ale corpurilor și deplasările virtuale ale punctelor în care acționează forțele concentrate în funcție de o rotire parametru $\delta\theta$.

Alegem $\delta\theta_1 = \delta\theta$ această rotire parametru.

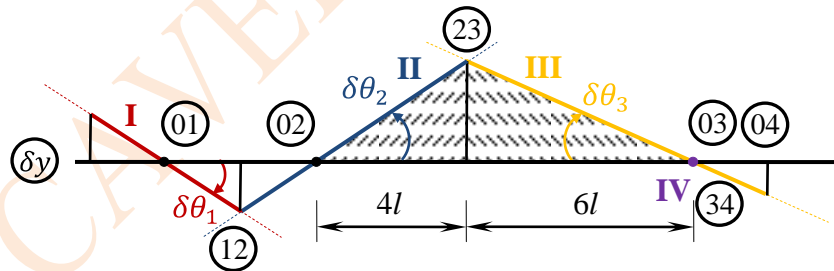
Calculăm deplasarea virtuală verticală a centrului relativ de rotație (12) atât din diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului I cât și din cea a corpului II:

$$\begin{aligned}\delta y_{(12)}^I &= 2l \cdot \delta\theta_1 \\ \delta y_{(12)}^{II} &= 2l \cdot \delta\theta_2\end{aligned} \Rightarrow 2l \cdot \delta\theta_1 = 2l \cdot \delta\theta_2 \Rightarrow \delta\theta_2 = \delta\theta_1 = \delta\theta$$



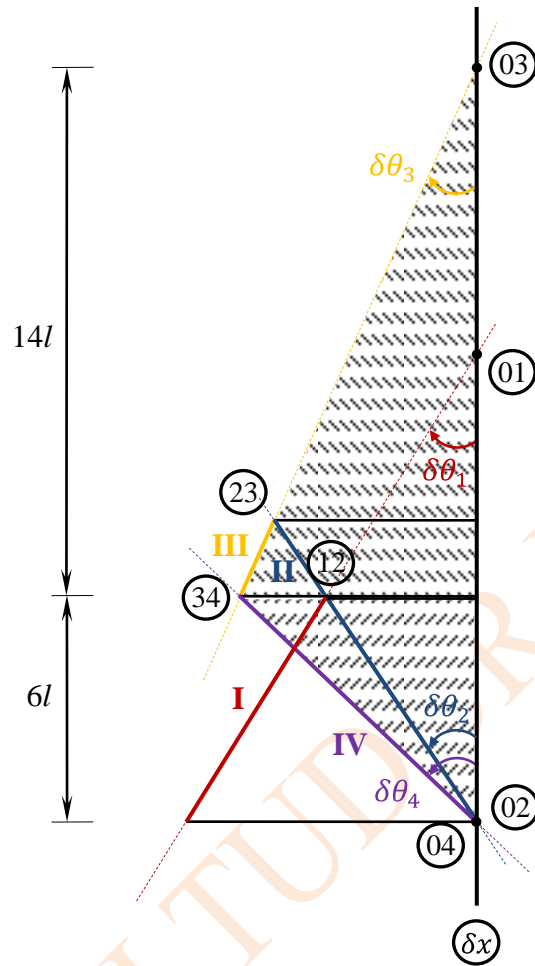
Rotirea virtuală a corpului III se determină prin calcularea deplasării virtuale verticale a centrului relativ de rotație (23) atât din diagrama de deplasări virtuale verticale a corpului II cât și din cea a corpului III:

$$\begin{aligned}\delta y_{(23)}^{II} &= 4l \cdot \delta\theta_2 \\ \delta y_{(23)}^{III} &= 6l \cdot \delta\theta_3\end{aligned} \Rightarrow 4l \cdot \delta\theta_2 = 6l \cdot \delta\theta_3 \Rightarrow \delta\theta_3 = \frac{4}{6} \delta\theta_2 = \frac{2}{3} \delta\theta$$



Rotirea virtuală a corpului IV se determină prin calcularea deplasării virtuale orizontale a centrului relativ de rotație (34) atât din diagrama de deplasări virtuale orizontale a corpului III cât și din cea a corpului IV:

$$\begin{aligned}\delta x_{(34)}^{III} &= 14l \cdot \delta\theta_3 \\ \delta x_{(34)}^{IV} &= 6l \cdot \delta\theta_4\end{aligned} \Rightarrow 14l \cdot \delta\theta_3 = 6l \cdot \delta\theta_4 \Rightarrow \delta\theta_4 = \frac{14}{6} \delta\theta_3 = \frac{14}{9} \delta\theta$$



Se vor citi și se vor determina deplasările virtuale ale punctelor de aplicație ale forțelor concentrate:

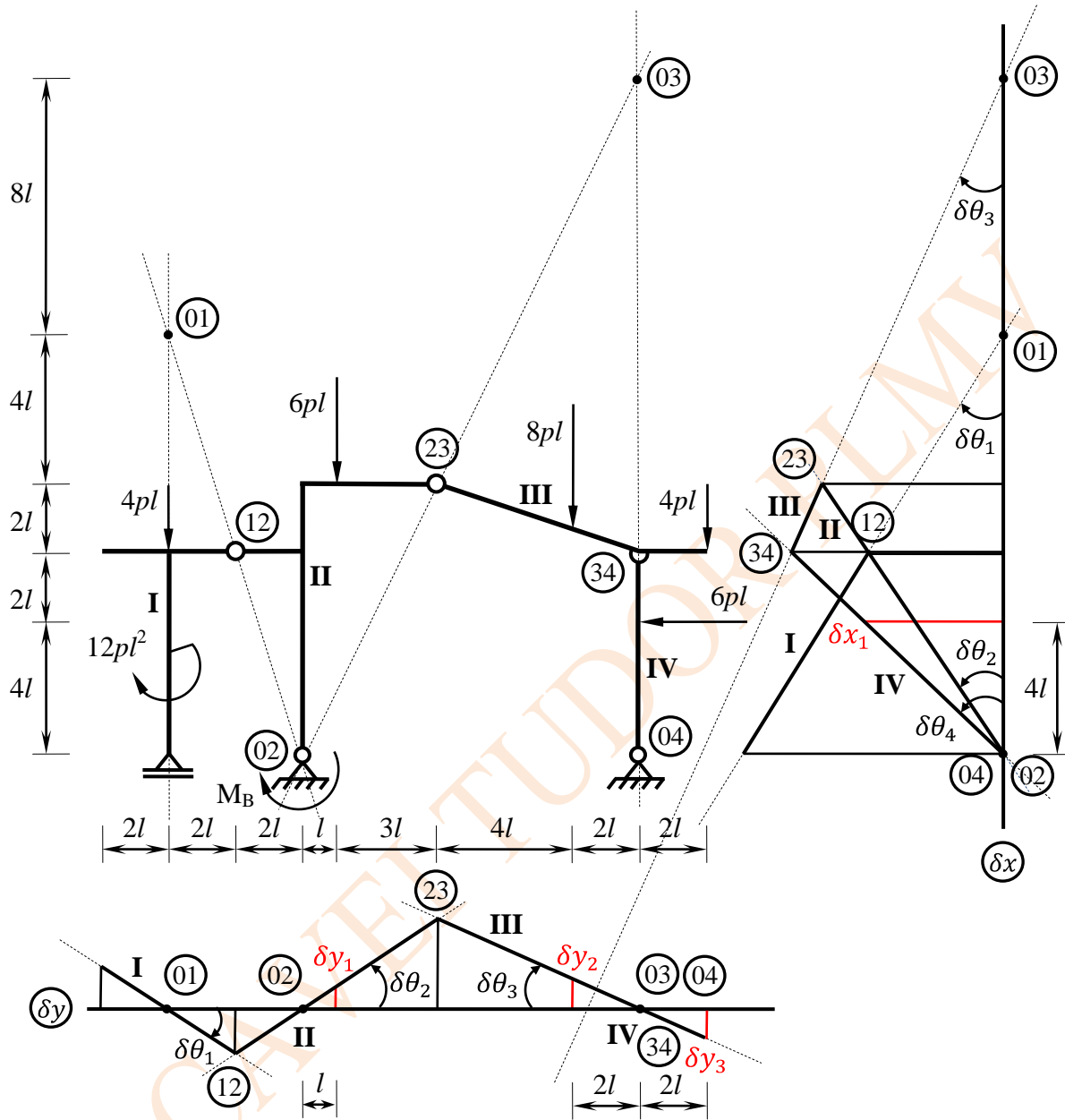
- deplasarea virtuală orizontală a punctului de aplicație al forței orizontale $6pl$, notată cu δx_1 ;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale $4pl$ este zero;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale $6pl$, notată cu δy_1 ;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale $8pl$, notată cu δy_2 ;
- deplasarea virtuală verticală a punctului de aplicație al forței verticale $4pl$, notată cu δy_3 .

$$\delta x_1 = 4l \cdot \delta \theta_4 = 4l \cdot \frac{14}{9} \delta \theta = \frac{56}{9} l \cdot \delta \theta$$

$$\delta y_1 = l \cdot \delta \theta_2 = l \cdot \delta \theta$$

$$\delta y_2 = 2l \cdot \delta \theta_3 = 2l \cdot \frac{2}{3} \delta \theta = \frac{4}{3} l \cdot \delta \theta$$

$$\delta y_3 = 2l \cdot \delta \theta_3 = 2l \cdot \frac{2}{3} \delta \theta = \frac{4}{3} l \cdot \delta \theta$$



Vom aplica principiul lucrului mecanic virtual:

$$\delta L = 0$$

O forță produce lucru mecanic pozitiv (semn +) dacă deplasarea punctului său de aplicație este în sensul forței; un moment concentrat produce lucru mecanic pozitiv (semn +) dacă efectul de rotire al momentului este în același sens cu rotirea corpului pe care acționează.

Astfel:

$$+6pl \cdot \delta x_1 + 4pl \cdot 0 - 6pl \cdot \delta y_1 - 8pl \cdot \delta y_2 + 4pl \cdot \delta y_3 + 12pl^2 \cdot \delta \theta_1 - M_B \cdot \delta \theta_2 = 0$$

$$+6pl \cdot \frac{56}{9}l \cdot \delta\theta + 0 - 6pl \cdot l \cdot \delta\theta - 8pl \cdot \frac{4}{3}l \cdot \delta\theta + 4pl \cdot \frac{4}{3}l \cdot \delta\theta + 12pl^2 \cdot \delta\theta - M_B \cdot \delta\theta = 0$$

Se împarte ecuația la $\delta\theta$. Rezultă:

$$M_B = 38pl^2$$

MACAVEI TUDOR PLMV