

SEMINAR 14**GRINZI CU ZĂBRELE – METODA SECȚIUNILOR****CUPRINS**

| | |
|---|--------|
| 14. Grinzi cu zăbrele – Metoda secțiunilor |1 |
| Cuprins |1 |
| Introducere |1 |
| 14.1. Aspecte teoretice |2 |
| 14.2. Aplicații rezolvate |3 |

14. Grinzi cu zăbrele – Metoda secțiunilor**Introducere
seminar**

În acest seminar se vor determina anumite eforturi din barele unei grinzi cu zăbrele plană, simplă și static determinată utilizând metoda secțiunilor.

Aplicațiile studiate sunt aplicații în plan.

**Obiective seminar**

După parcurgerea acestui seminar cursantul va ști:

- să identifice o grindă cu zăbrele static determinată;
- să determine reacțiunile unei grinzi cu zăbrele static determinată;
- să determine eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele utilizând metoda secțiunilor.

**Durata medie de
studiu individual**

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar și realizarea aplicațiilor.



Cunoștințe necesare

Cunoștințele necesare studiului acestui seminar sunt:

- scrierea condițiilor de echilibru scalare de tip ecuații de forțe și momente (seminar 2, seminar 5, modul 7);
- metoda secțiunilor (modul 12).

14.1. Aspecte teoretice

Se vor determina eforturile în barele unei grinzi cu zăbrele plană, simplă și static determinată.

Pentru ca un sistem de corpuri să fie static determinat trebuie să fie îndeplinite două condiții: una cantitativă și una calitativă.

Condiția cantitativă pentru o grindă cu zăbrele este:

$$2 \cdot n = b + 3$$

unde n este numărul de noduri iar b este numărul barelor grinzii cu zăbrele.

Pentru o grindă cu zăbrele simplă este suficient ca aceasta să fie invariabilă din punct de vedere geometric (aceasta se rezolvă prin alcătuirea grinzii cu zăbrele prin alăturare de triunghiuri).

Datorită ipotezelor simplificatoare, în barele unei grinzi cu zăbrele se dezvoltă doar eforturi axiale (de întindere sau de compresiune), constante pe lungimea barelor.

Fie bara mărginită de nodurile „ i ” și „ j ” (figura 14.1). Se observă că dacă bara este întinsă, efortul axial iese din nod, iar dacă bara este comprimată efortul axial intră în nod.

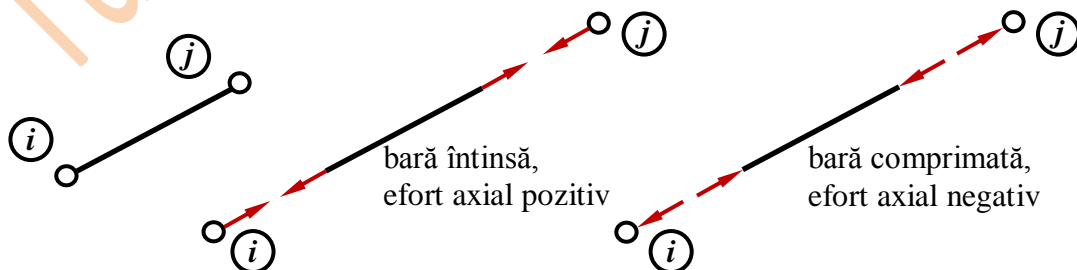
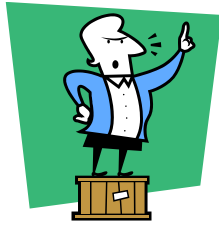


Fig. 14.1 Convenția de semn pentru efortul axial

Pe schema rezultatelor, eforturile se reprezintă în raport cu nodurile grinzii cu zăbrele.

14.2. Aplicații rezolvate



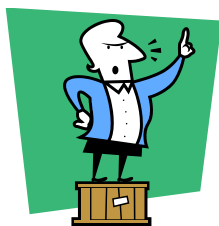
Enunț general



Etape de rezolvare

Să se determine eforturile din barele însemnate ale grinzii cu zăbrele din figură utilizând metoda secțiunilor.

- 1) Se verifică dacă grinda cu zăbrele este static determinată;
- 2) Se numerează nodurile și se determină cosinuşii directori ai barelor înclinate;
- 3) Se determină reacțiunile grinzii cu zăbrele;
- 4) Se secționează complet grinda cu zăbrele (astfel încât să rezulte două părți distincte); secțiunea se va face prin maxim trei bare de efort necunoscut, iar direcțiile acestor bare nu trebuie să fie toate trei paralele sau toate trei concurente în același punct;
- 5) Se alege una dintre cele două părți și se încarcă cu forțele exterioare (cunoscute) și cu eforturile (cunoscute și necunoscute) din barele suprimate; eforturile necunoscute se aleg inițial a fi de întindere;
- 6) Se exprimă echilibrul părții alese prin scrierea a trei ecuații de echilibru scalare independente; aceste ecuații se scriu astfel încât sistemul de ecuații rezultat să fie un sistem de ecuații decuplat (necunoscutele să se rezolve independent una în raport cu celelalte);
- 7) Se rezolvă ecuațiile de echilibru;
- 8) Se verifică rezultatele printr-o ecuație de echilibru neutilizată.



Enunț

APLICAȚIA 1

Pentru grinda cu zăbrele din figura 14.2 să se determine eforturile din barele însemnate utilizând metoda secțiunilor.

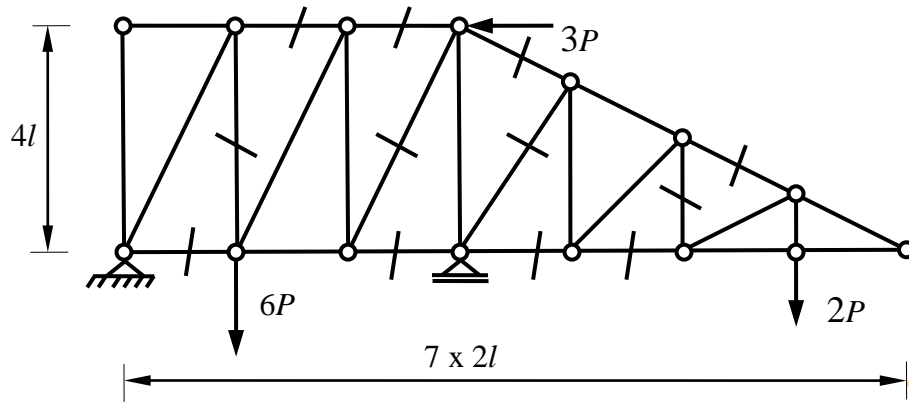


Fig. 14.2

1) Se verifică dacă grinda cu zăbrele este static determinată.

Condiția de determinare statică:

$$2 \cdot n = b + 3$$

$$2 \cdot 15 = 27 + 3$$

$$30 = 30$$

Grinda cu zăbrele din figură este alcătuită prin alăturare de triunghiuri, rezultă că este static determinată.

2) Se numerează nodurile (figura 14.3) și se determină cosinuzii directori ai barelor înclinate

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4l}{\sqrt{(2l)^2 + (4l)^2}} = 0,894 \\ \cos \alpha = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + (4l)^2}} = 0,447 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{3l}{\sqrt{(2l)^2 + (3l)^2}} = 0,832 \\ \cos \beta = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + (3l)^2}} = 0,555 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \gamma = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + (2l)^2}} = 0,707 \\ \cos \gamma = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + (2l)^2}} = 0,707 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \delta = \frac{l}{\sqrt{(2l)^2 + l^2}} = 0,447 \\ \cos \delta = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + l^2}} = 0,894 \end{cases}$$

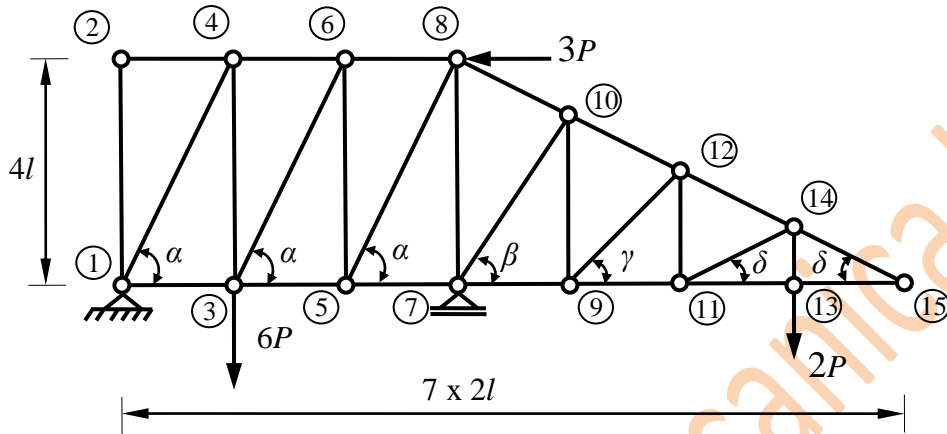


Fig. 14.3

3) Determinarea reacțiunilor grinzii cu zăbrele

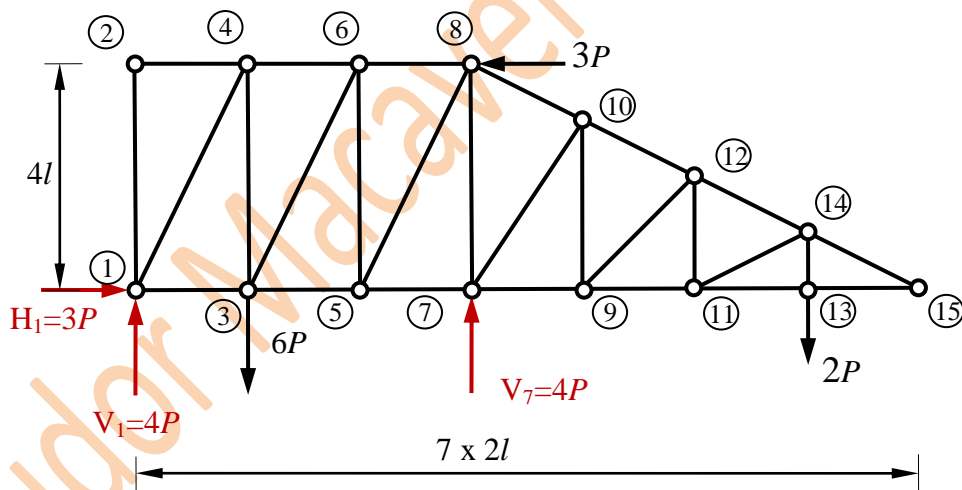


Fig. 14.4

$$\sum X_i = 0: H_1 - 3P = 0$$

$$\sum M_1 = 0: 3P \cdot 3l - 6P \cdot 2l + V_7 \cdot 6l - 2P \cdot 12l = 0$$

$$\sum M_7 = 0: 4P \cdot 3l - V_1 \cdot 6l + 6P \cdot 4l - 3P \cdot 6l = 0$$

Rezultă:

$$H_1 = 4P, \quad V_7 = 4P, \quad V_1 = 4P$$

Verificare:

$$\sum Y_i = 0: V_1 - 6P + V_2 - 2P = 4P - 6P + 4P - 2P = 0$$

Pentru determinarea eforturilor din barele însemnate se vor face patru secțiuni ce respectă condițiile etapei 4. Acestea se redau în figura 14.5 și se vor trata separat.

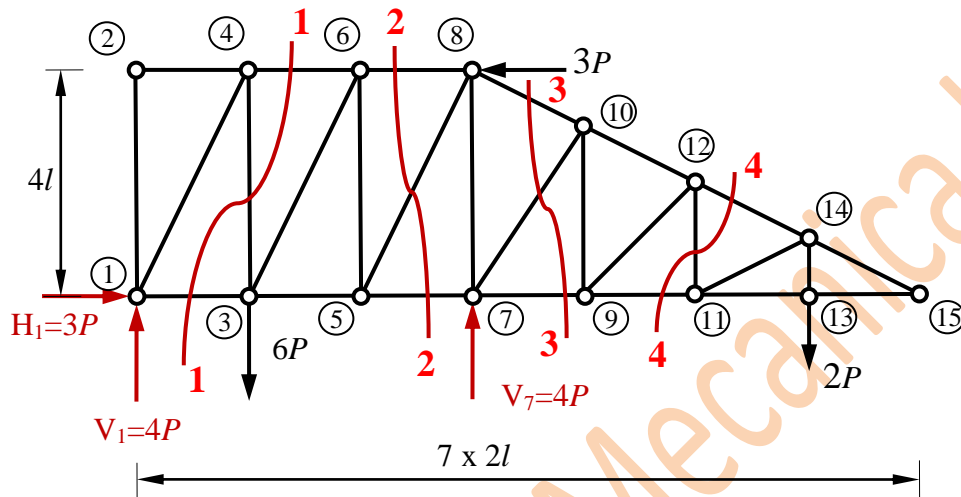


Fig. 14.5

Secțiunea 1-1.

S-au secționat barele 1-3, 3-4 și 4-6 și s-au înlocui cu eforturile corespunzătoare (considerate inițial de întindere). Se alege partea din stânga (este acționată de mai puține forțe). Aceasta este alcătuită dintr-o alăturare de triunghiuri și se comportă ca un solid rigid (este invariabilă din punct de vedere geometric).

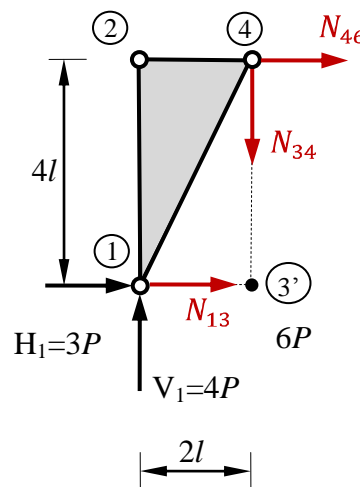


Fig. 14.5

Deoarece această parte se comportă ca un solid rigid, se pot scrie trei ecuații de echilibru independente pentru determinarea celor trei necunoscute. Aceste ecuații se scriu astfel încât sistemul de ecuații rezultat să fie un sistem de ecuații decuplate (fiecare necunoscută să se determine independent de celelalte două).

În acest caz se vor scrie ecuațiile:

$$\sum Y_i = 0: -N_{34} + 4P = 0$$

$$\sum M_4 = 0: 3P \cdot 4l - 4P \cdot 2l + N_{13} \cdot 4l = 0$$

$$\sum M_{3'} = 0: 4P \cdot 2l + N_{46} \cdot 4l = 0$$

Se impune precizarea că punctul 3' este un punct situat la intersecția dreptelor suport ale eforturilor N_{13} și N_{34} , ce are poziția nodului 3, dar nu este nodul 3 (nodul 3 se află pe partea grinzii cu zăbrele ce nu a fost considerată în abordarea acestei secțiuni).

Din rezolvarea celor trei ecuații rezultă:

$$N_{34} = +4P, \quad N_{13} = -P, \quad N_{46} = -2P$$

Verificarea rezultatelor se face printr-o ecuație de echilibru neutilizată:

$$\sum X_i = 0: 3P + N_{13} + N_{46} = 3P + (-P) + (-2P) = 0$$

Secțiunea 2-2.

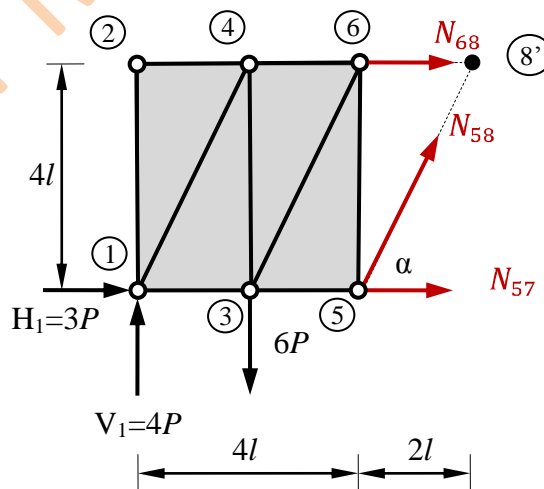


Fig. 14.6

Ecuațiile de echilibru sunt:

$$\sum Y_i = 0: N_{58} \cdot \sin \alpha + 4P - 6P = 0$$

$$\sum M_5 = 0: 4P \cdot 4l - 6P \cdot 2l + N_{68} \cdot 4l = 0$$

$$\sum M_{8'} = 0: 3P \cdot 4l - 4P \cdot 6l + 6P \cdot 4l + N_{57} \cdot 4l = 0$$

Din rezolvarea ecuațiilor rezultă:

$$N_{58} = +2,24P, \quad N_{68} = -P, \quad N_{57} = -3P$$

Verificarea rezultatelor se face printr-o ecuație de echilibru neutilizată:

$$\sum X_i = 0: 3P + N_{57} + N_{68} + N_{58} \cdot \cos \alpha = 3P + (-3P) + (-P) + 2,24P \cdot 0,447 = 0$$

Secțiunea 3-3

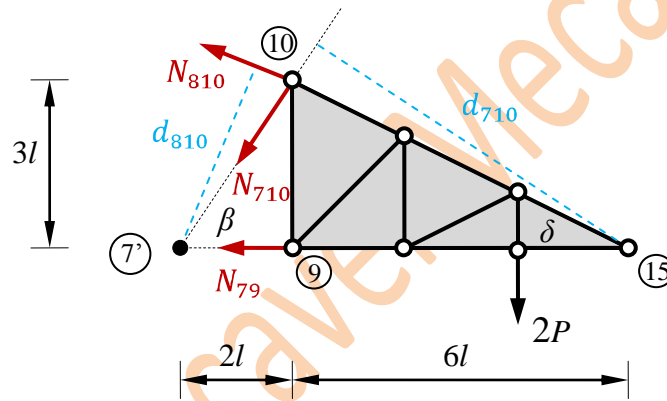


Fig. 14.7

Ecuțiile de echilibru sunt:

$$\sum M_{10} = 0: N_{79} \cdot 3l + 2P \cdot 4l = 0$$

$$\sum M_{15} = 0: 2P \cdot 2l + N_{710} \cdot d_{710} = 0$$

$$\sum M_{7'} = 0: 2P \cdot 6l - N_{810} \cdot d_{810} = 0$$

unde d_{710} și d_{810} sunt distanțele de la nodul 15, respectiv 7' la dreptele suport ale eforturilor N_{710} , respectiv N_{810} . Aceste distanțe sunt:

$$d_{710} = 8l \cdot \sin \beta = 8l \cdot 0,832 = 6,656l$$

$$d_{810} = 8l \cdot \sin \delta = 8l \cdot 0,447 = 3,576l$$

Din rezolvarea ecuațiilor rezultă:

$$N_{79} = -2,67P, \quad N_{710} = -0,60P, \quad N_{810} = +3,36P$$

Verificarea rezultatelor se face printr-o ecuație de echilibru neutilizată:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0: N_{810} \cdot \cos \delta + N_{710} \cdot \cos \beta + N_{79} = \\ = 3,36P \cdot 0,894 + (-0,60P) \cdot 0,555 + (-2,67P) = 0 \end{aligned}$$

Secțiunea 4-4

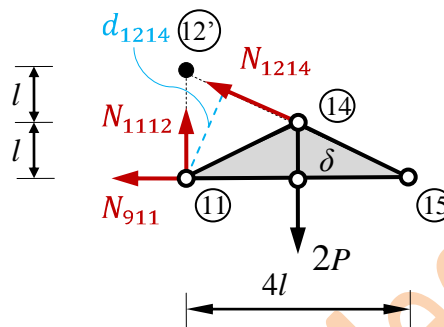


Fig. 14.8

Ecuțiile de echilibru sunt:

$$\sum M_{15} = 0: N_{1112} \cdot 4l - 2P \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_{11} = 0: -2P \cdot 2l + N_{1214} \cdot d_{1214} = 0$$

$$\sum M_{12'} = 0: 2P \cdot 2l + N_{911} \cdot 2l = 0$$

unde d_{1214} este distanța de la nodul 11 la dreapta suport a efortului N_{1214} . Aceasta este:

$$d_{1214} = 4l \cdot \sin \delta = 4l \cdot 0,447 = 1,788l$$

Din rezolvarea ecuațiilor rezultă:

$$N_{1112} = +P, \quad N_{1214} = +2,24P, \quad N_{911} = -2P$$

Verificarea rezultatelor se face printr-o ecuație de echilibru neutilizată:

$$\sum X_i = 0: -N_{1214} \cdot \cos \delta - N_{911} = -2,24P \cdot 0,894 - (-2P) = 0$$

Rezultatele se trec pe schema rezultatelor:

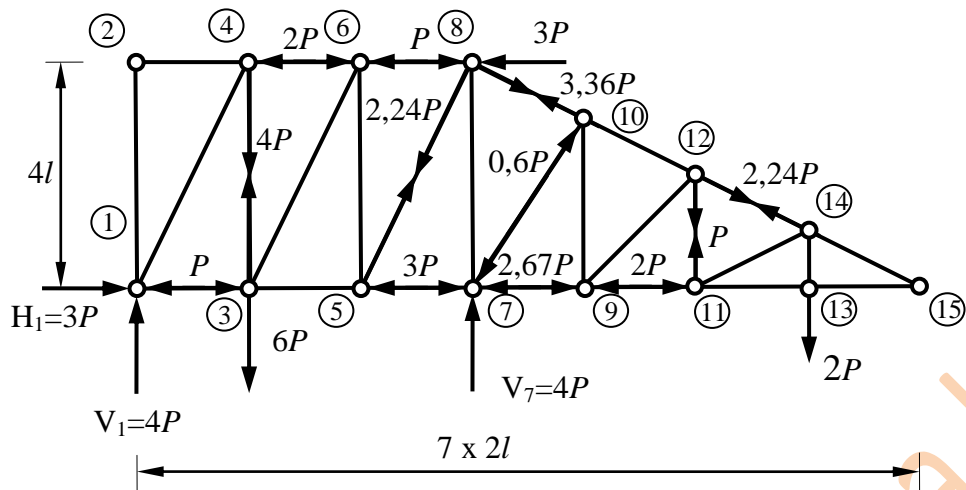


Fig. 14.9



**Prezentarea
rezultatelor și
modul de evaluare**

Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- verificarea grinzii cu zăbrele (dacă este static determinată) – 1p;
- determinarea reacțiilor – 1p;
- efectuarea corectă a unei secțiuni – 1p;
- alegerea ecuațiilor de echilibru astfel încât să rezulte un sistem de ecuații decuplate – 1p;
- scrierea corectă a ecuațiilor de echilibru – 3p;
- verificarea rezultatelor – 1p;
- schema corectă a rezultatelor – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplinește obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 6 puncte.