

SEMINAR 10

STATICA SISTEMELOR – METODA ECHILIBRULUI CORPURILOR COMPONENTE

CUPRINS

10. Statica sistemelor – Metoda echilibrului corpurilor componente	1
Cuprins	1
Introducere	1
10.1. Aspecte teoretice	2
10.2. Aplicații rezolvate	3

10. Statica sistemelor – Metoda echilibrului corpurilor componente



În acest seminar se vor rezolva reacțiunile din legăturile unui sistem de corpuri static determinat utilizând metoda echilibrului corpurilor componente.

Aplicațiile studiate sunt aplicații în plan.

Introducere seminar



Obiective seminar

După parcurgerea acestui seminar cursantul va ști:

- să verifice dacă un sistem de corpuri este static determinat;
- să aranjeze corespunzător încărcările pentru metoda echilibrului corpurilor componente;
- să scrie condițiile de echilibru pentru un sistem de corpuri static determinat aferente metodei echilibrului corpurilor componente.



Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar și realizarea aplicațiilor.



**Cunoștințe
necesare**

Cunoștințele necesare studiului acestui seminar sunt:

- scrierea condițiilor de echilibru scalare de tip ecuații de forțe (seminar 2, seminar 5, modul 7);
- scrierea condițiilor de echilibru scalare de tip ecuații de momente, sisteme de forțe coplanare (seminar 3, seminar 5, modul 5);
- metoda echilibrului corpurilor componente (modul 9).

9.1. Aspecte teoretice

Pe lângă legăturile exterioare, în cazul sistemelor de corpuri apar și legături între corpurile din sistem, numite legături intermediare (interioare). Se va prezenta în continuare articulația intermediară.

Articulația intermediară simplă (figura 10.1) fixează un punct al unui corp de celălalt corp. Astfel, aceasta suprimă ansamblului celor două corpuri două grade de libertate (translațiile relative ale celor două corpuri). Articulația intermediară simplă se schematizează printr-un cerc mic situat în punctul de legătură. O articulație intermediară simplă suprimă ansamblului de corpuri două grade de libertate și introduce în calcul două necunoscute scalare.

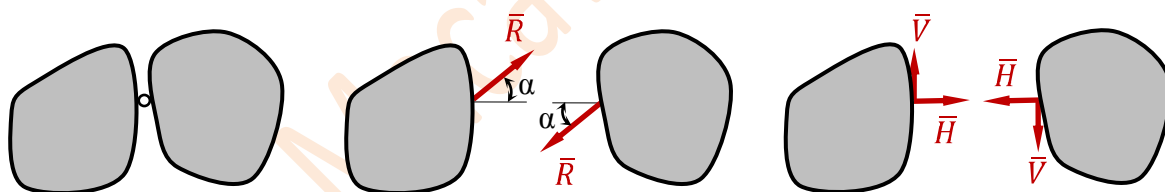


Fig. 10.1. Articulația intermediară simplă

Articulația intermediară multiplă leagă între ele n corpuri ale unui sistem de corpuri ($n > 2$). Se alege un corp (corpul n) și se consideră că fiecare dintre celelalte corpuri este legat de corpul n printr-o articulație intermediară simplă. Rezultă că o articulație multiplă ce leagă între ele n corpuri poate fi echivalată cu $(n-1)$ articulații intermediare simple (în figura 10.2 se prezintă modul de abordare al unei articulații ce leagă trei corpuri ale unui sistem de corpuri).

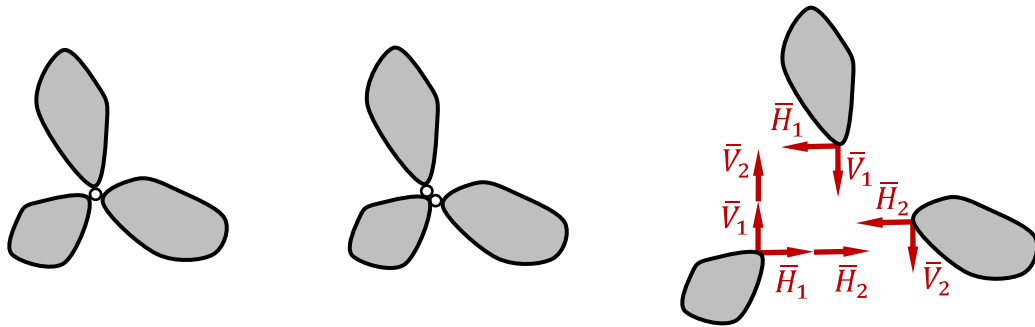


Fig. 10.2. Articulația intermediară multiplă

Un sistem de corpuri static determinat este acel sistem de corpuri imobilizat cu număr minim de legături necesare. Pentru a fi static determinat, un sistem de corpuri trebuie să îndeplinească două condiții: o condiție cantitativă și o condiție calitativă.

Condiția cantitativă:

$$3 \cdot N_C = 3 \cdot N_i + 2 \cdot N_{a.s.} + 1 \cdot N_{r.s.}$$

unde N_i este numărul de încastrări, $N_{a.s.}$ este numărul de articulații simple (exterioare sau intermediare) iar $N_{r.s.}$ este numărul reazemelor simple sau al legăturilor simple intermediare.

Condiția calitativă:

Sistemul de corpuri să fie imobilizat. Verificarea imobilității sistemului de corpuri se face prin verificarea imobilității fiecărui corp în parte cunoscând, pe lângă cele trei situații de la solidul rigid și faptul că o articulație intermediară atașată unui corp fix devine o articulație fixă.

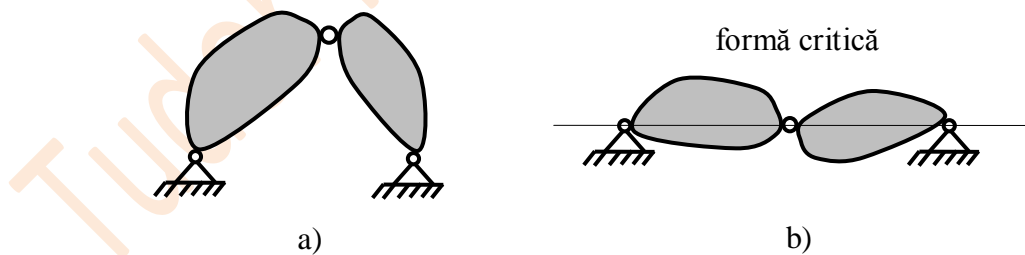


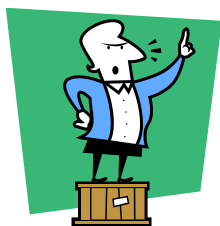
Fig. 10.3. Cadrul triplu articulată

Un sistem de corpuri utilizat frecvent este sistemul alcătuit din două corpuri ce au ca legături exterioare două articulații și ca legătură intermediară o articulație. Acest sistem de corpuri se numește cadru triplu articulată și este un sistem de corpuri static determinat (figura 10.3.a).

Forma critică a cadrului triplu articulată se obține dacă cele trei articulații sunt coliniare (figura 10.3.b).

În metoda echilibrului corpurilor componente se exprimă echilibrul fiecărui corp dintr-un sistem de corpuri. În acest mod, se transformă problema rezolvării unui sistem alcătuit din n corpuri în n probleme de solid rigid.

10.2. Aplicații rezolvate



Enunț general



Etape de rezolvare

Pentru sistemul de corpuri din figură să se determine reacțiunile utilizând metoda echilibrului corpurilor componente.

1. Se verifică dacă sistemul de corpuri este static determinat;

2. Se realizează schema statică pentru sistemul de corpuri:

- se izolează fiecare corp (se reprezintă corpul fără încărcări și fără legături);
- se înlocuiesc legăturile corpurilor cu reacțiunile și forțele de legătură corespunzătoare (forțele de legătură vor fi perechi de forțe, cu mărimi egale și cu sensuri opuse);
- se solicită fiecare corp cu încărcările aferente, aranjate corespunzător (forțele distribuite se concentrează pe corpurile pe care acționează, forțele și momentele concentrate se reprezintă așa cum sunt);
- se cotează fiecare corp.

3. Pentru fiecare corp se scriu trei ecuații de echilibru scalare independente;

4. Se rezolvă sistemul ecuațiilor de echilibru obținut;

5. Se verifică rezultatele obținute prin scrierea, pentru fiecare corp în parte, a unei ecuații de echilibru neutilizate în rezolvarea necunoscutelor.



Enunț

APLICAȚIA 1

Pentru sistemul de corpuri din figura 10.4 să se determine reacțiunile utilizând metoda echilibrului corpurilor componente.

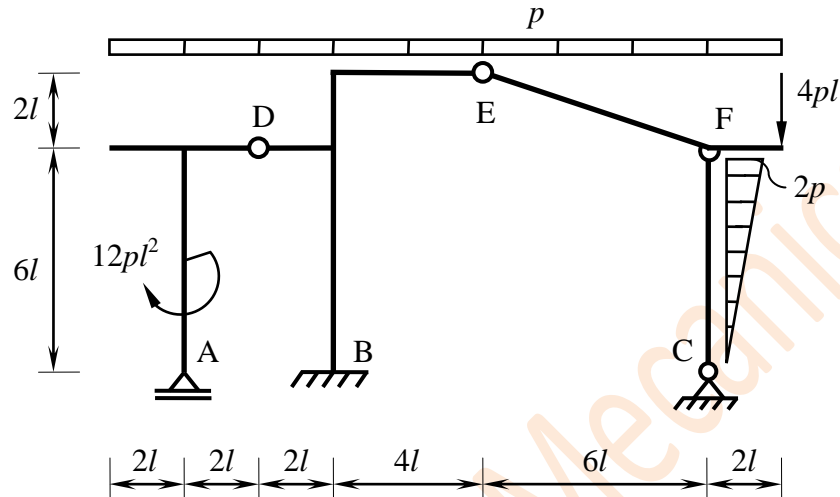


Fig. 10.4

1. Se verifică dacă sistemul de corpuri este static determinat:

Condiția cantitativă:

$$3 \cdot N_c = 3 \cdot N_f + 2 \cdot N_{a.s.} + 1 \cdot N_{r.s.}$$

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1$$

$$12 = 12$$

Condiția calitativă:

Corpul BDE are ca legătură o încadrare, deci este fix. Rezultă că articulațiile intermediare D și E sunt fixe. Corpul AD are ca legături o articulație fixă (D) și un reazem simplu (A). Cum direcția reazemului simplu (A) nu trece prin articulația (D) rezultă că acest corp este imobilizat. Pentru partea EFC se observă că sunt două corpuri ce au ca legături două articulații fixe (E și C) și o articulație intermediară (F). Cum cele trei articulații nu sunt coliniare, cele două corpuri formează un cadru triplu articulat, adică un sistem de corpuri fix. Dacă toate corpurile sistemului sunt fixe, rezultă că sistemul de corpuri este fixat (imobilizat), deci și condiția calitativă este îndeplinită. Rezultă că sistemul de corpuri din figura 10.4 este static determinat.

2. Schema statică pentru sistemul de corpuri este realizată în figura 10.5, astfel:

- se izolează fiecare corp (se reprezintă corpul fără încărcări și fără legături);
- se înlocuiesc legăturile corpurilor cu reacțiunile și forțele de legătură corespunzătoare (forțele de legătură vor fi perechi de forțe, cu mărimi egale și cu sensuri opuse);
- se solicită fiecare corp cu încărcările aferente, aranjate corespunzător (forțele distribuite se concentrează pe corpurile pe care acționează, forțele și momentele concentrate se reprezintă așa cum sunt);
- se cotează fiecare corp.

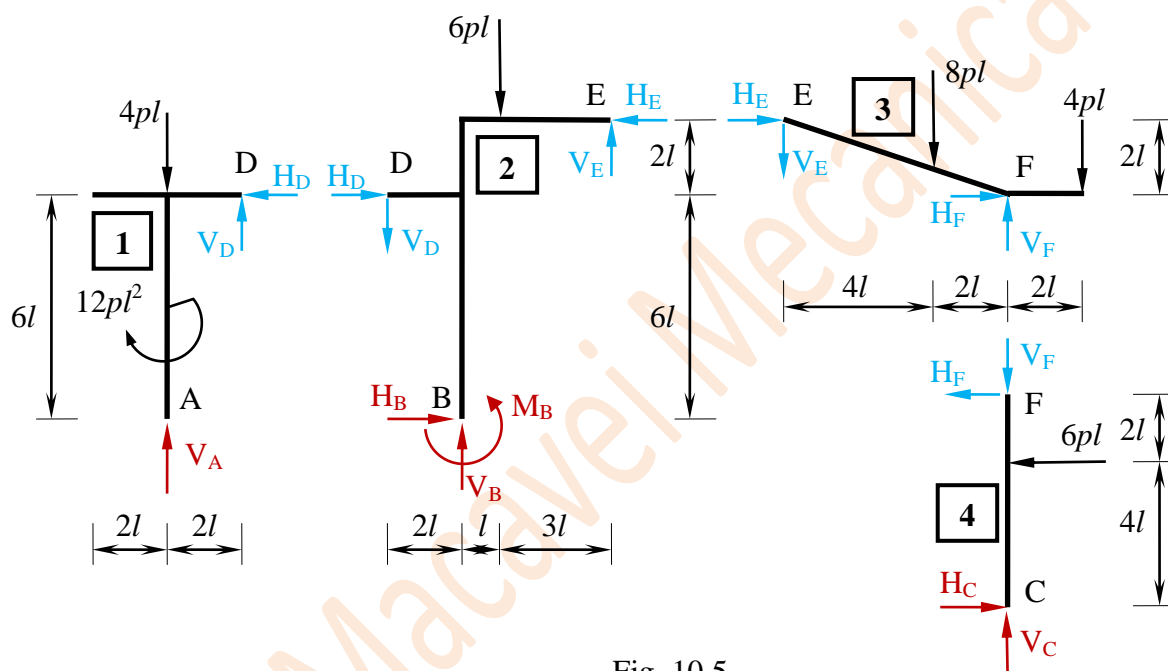


Fig. 10.5

3. Pentru fiecare corp se scriu trei ecuații de echilibru scalare independente.

Corpul 1:

$$\sum X_i = 0 : H_D = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_D = 0 : V_A \cdot 2l + 12pl^2 - 4pl \cdot 2l = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 : 12pl^2 - V_D \cdot 2l - H_D \cdot 6l = 0 \quad (3)$$

Corpul 2:

$$\sum X_i = 0 : H_B + H_D - H_E = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0 : V_B - V_D - 6pl + V_E = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_A = 0 : M_B + V_D \cdot 2l - H_D \cdot 6l - 6pl \cdot l + V_E \cdot 4l + H_E \cdot 8l = 0 \quad (6)$$

Corpul 3:

$$\sum X_i = 0 : H_E + H_F = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_E = 0 : 8pl \cdot 4l + 4pl \cdot 8l - H_F \cdot 2l - V_F \cdot 6l = 0 \quad (8)$$

$$\sum M_F = 0 : V_E \cdot 6l - H_E \cdot 2l + 8pl \cdot 2l - 4pl \cdot 2l = 0 \quad (9)$$

Corpul 4:

$$\sum Y_i = 0 : V_C - V_F = 0 \quad (10)$$

$$\sum M_F = 0 : 6pl \cdot 2l - H_C \cdot 6l = 0 \quad (11)$$

$$\sum M_C = 0 : H_F \cdot 6l + 6pl \cdot 4l = 0 \quad (12)$$

4. Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru obținut.

În urma rezolvării se obțin:

$$(1) H_D = 0, \quad (2) V_A = -2pl, \quad (3) V_D = 6pl, \quad (11) H_C = 2pl$$

$$(12) H_F = -4pl, \quad (7) H_E = 4pl, \quad (8) V_F = 12pl, \quad (9) V_E = 0$$

$$(10) V_C = 12pl, \quad (4) H_B = 4pl, \quad (5) V_B = 12pl, \quad (6) M_B = -38pl^2$$

5. Verificare.

Corpul 1

$$\sum Y_i = 0 : V_A - 4pl + V_D = -2pl - 4pl + 6pl = 0$$

Corpul 2

$$\sum M_E = 0 : M_B - V_B \cdot 4l + H_B \cdot 8l + V_D \cdot 6l + H_D \cdot 2l + 6pl \cdot 3l =$$

$$-38pl^2 - 12pl \cdot 4l + 4pl \cdot 8l + 6pl \cdot 6l + 0 + 18pl^2 = 0$$

Corpul 3

$$\sum Y_i = 0 : V_F - 8pl - V_E - 4pl = 12pl - 8pl + 0 - 4pl = 0$$

Corpul 4

$$\sum X_i = 0 : H_F + 6pl - H_C = -4pl + 6pl - 2pl = 0$$

6) Reprezentarea rezultatelor

Reprezentarea rezultatelor se face pe schema rezultatelor, cu sensul corect și intensitatea în valoare absolută (figura 10.6).

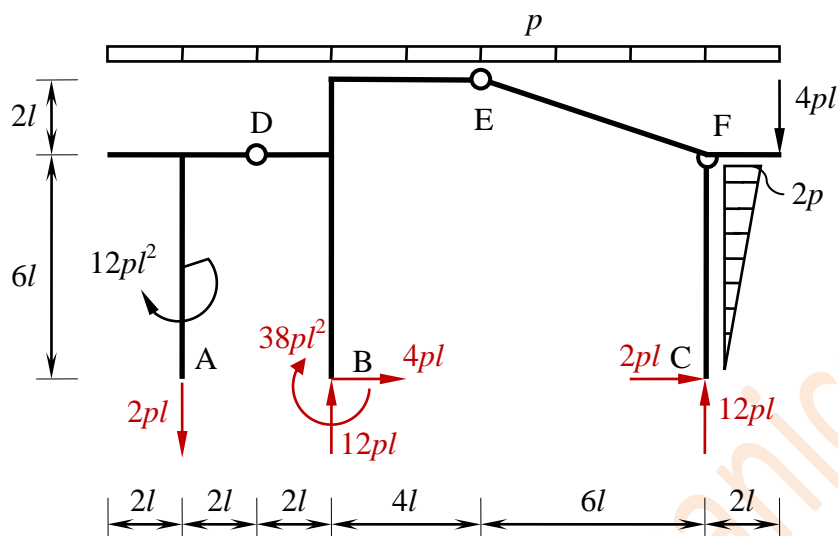


Fig. 10.6



**Prezentarea
rezultatelor și
modul de evaluare**

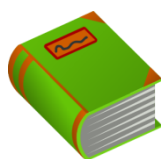
Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- verificarea sistemului de corpuri (dacă este static determinat) – 1p;
- realizarea corectă a schemei statice – 2p;
- scrierea ecuațiilor de echilibru – 3p;
- rezolvarea ecuațiilor de echilibru – 1p;
- verificarea rezultatelor – 1p;
- reprezentarea rezultatelor și/sau eventuale comentarii – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplinește obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.



Bibliografie modul

[1]. Szolga, V., Szolga, A. M., „Mecanica Teoretică. Note de curs și îndrumător de seminar. Partea I”, Editura Conspress, București, 2003, pag. 132.