SEMINAR 9

STATICA SOLIDULUI RIGID

CUPRINS

9. Statica solidului rigid

Introducere seminar

În acest seminar se vor aplica condițiile de echilibru pentru un solid rigid static determinat.

Aplicațiile studiate sunt aplicații în plan.

Obiective seminar

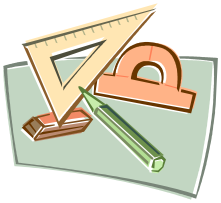
După parcurgerea acestui seminar cursantul va şti:

- să determine dacă un solid rigid este static determinat;
- să aranjeze corespunzător încărcările unui solid rigid;
- să aplice condițiile de echilibru pentru un solid rigid supus la legături ideale.

Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar şi realizarea aplicațiilor.



Cunoştinţe necesare

Cunoştinţele necesare studiului acestui seminar sunt:

- scrierea condiţiilor de echilibru scalare de tip ecuaţii de forţe (seminar 2, seminar 5, modul 7);
- scrierea condiţiilor de echilibru scalare de tip ecuaţii de momente, sisteme de forţe coplanare (seminar 3, seminar 5, modul 5);
- scrierea condiţiilor de echilibru pentru un solid rigid cu legături ideale (modul 8).

9.1. Aspecte teoretice

Solidul rigid este cel de-al doilea model cu care lucrează Mecanica teoretică. Solidul rigid este corpul nedeformabil, adică acel corp în care distanţa dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică indiferent de acţiunile la care este supus.

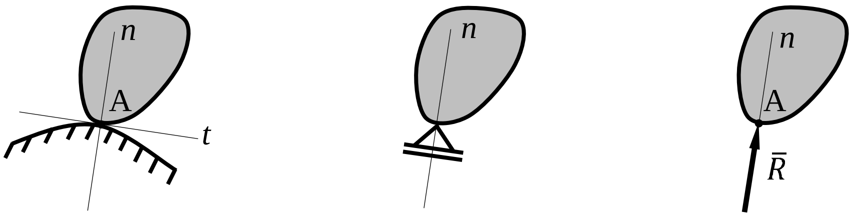
Un solid rigid este liber dacă poate ocupa orice poziţie în spaţiu. Dacă un solid rigid nu poate ocupa orice poziţie în spaţiu datorită restricţiilor de natură geometrică impuse punctelor lui, acesta se numeşte solid rigid cu legături. Dacă reacţiunile corespunzătoare legăturilor au direcţia normală la suprafaţa reprezentând legătura, solidul rigid este supus unor legături ideale (fără frecare).

În acest seminar se va studia problema plană (corp de tip placă plană, legăturile şi încărcările aflându-se în acelaşi plan cu corpul) a unui corp supus la legături ideale.

Legăturile ideale ale solidului rigid în plan sunt:

Reazemul simplu.

Prin definiţie reazemul simplu este legătura ideală (punctuală şi fără frecare) care suprimă corpului un grad de libertate.

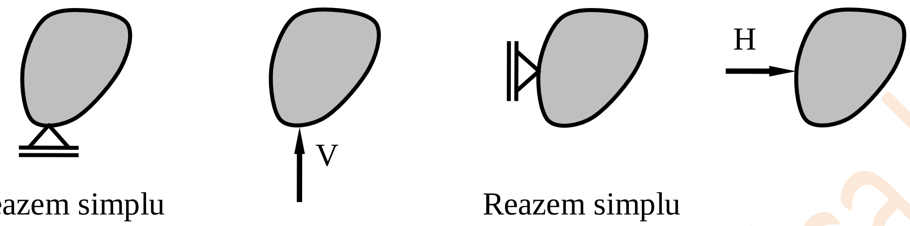


a) b) c)

Fig. 9.1. Reacţiunea introdusă de reazemul simplu

Reazemul simplu suprimă solidului rigid un grad de libertate şi introduce în calcul o singură necunoscută scalară (mărimea reacțiunii corespunzătoare acestuia).

Se disting două situații particulare utilizate frecvent: reazemul simplu vertical şi reazemul simplu orizontal (figura 9.2).

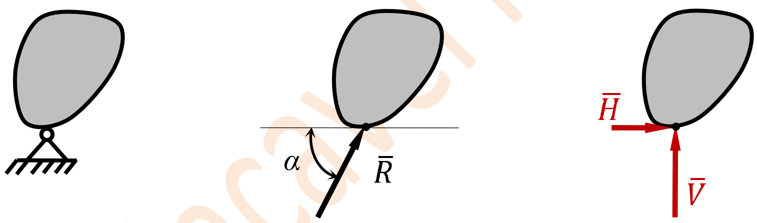


Reazem simplu vertical | Reazem simplu orizontal

Fig. 9.2

Reazemul articulat (articulația)

Prin definiție reazemul articulat este legătura ideală ce imobilizează un punct al solidului rigid.



a) b) c)

Fig. 9.3. Reacțiunea introdusă de articulație

Articulația suprimă solidului rigid două grade de libertate şi introduce în calcul două necunoscute scalare (mărimile a două forțe de direcții cunoscute).

Reazemul încastrat (încastrarea)

Prin definiție încastrarea este legătura ideală ce suprimă solidului rigid toate gradele de libertate (îl imobilizează).

O încastrare suprimă solidului trei grade de libertate şi introduce în calcul trei necunoscute scalare (două necunoscute mărime de forță şi o necunoscută mărime de moment).

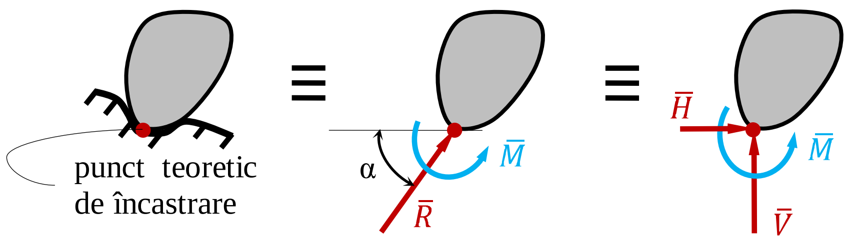


Fig. 9.4. Reacțiunile introduse de încastrare

Un solid rigid static determinat este acel solid rigid imobilizat cu număr minim de legături necesare. În plan, se disting trei cazuri de corp static determinat:

1) Un corp imobilizat cu ajutorul a trei reazeme simple (figura 9.5.a).

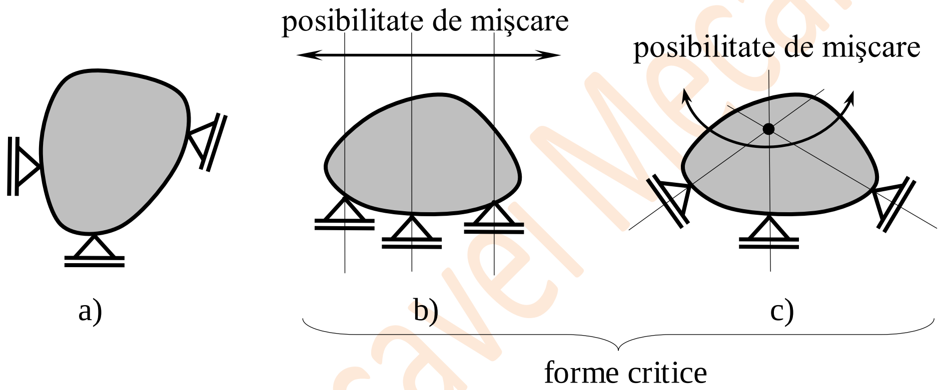
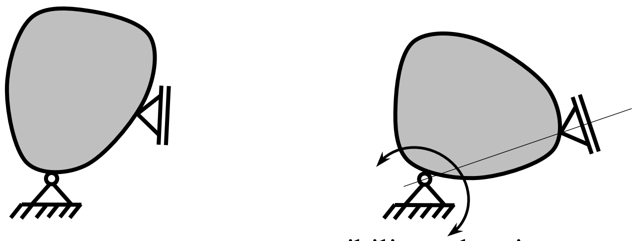


Fig. 9.5. Corp cu trei reazeme simple

Un corp cu trei reazeme simple este static determinat dacă direcţiile reazemelor simple nu sunt toate trei paralele (posibilitate de translație pe direcție perpendiculară pe direcţia reazemelor – figura 9.5.b) sau dacă direcţiile celor trei reazeme simple nu sunt concurente în acelaşi punct (posibilitate de rotație în jurul punctului de concurență – figura 9.5.c).

2) Un corp imobilizat cu ajutorul unei articulații şi a unui reazem simplu (figura 9.6.a).

Un corp cu o articulație şi un reazem simplu este static determinat dacă direcţia reazemului simplu nu trece prin articulație (posibilitate de rotație în jurul punctului în care se află articulația – figura 9.6.b).



a) b)

Fig. 9.6. Corp cu o articulaţie şi un reazem simplu

3) Un corp imobilizat cu ajutorul unei încastrări (figura 9.7).

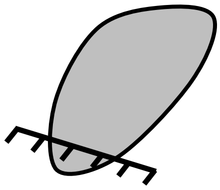


Fig. 9.7. Corp cu încastrare

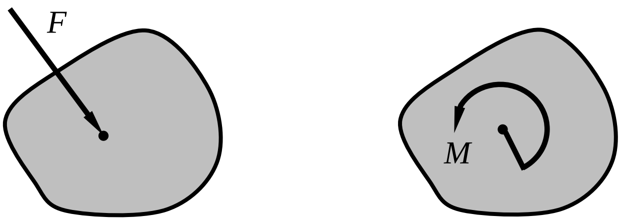
Un corp încastrat este întotdeauna static determinat.

Acţiunile asupra corpurilor se modelează prin sisteme de forţe denumite încărcări sau forţe active (date).

Se vor prezenta câteva categorii de încărcări:

Forţa concentrată (figura 9.8.a)

Este forţa ce acţionează într-un punct al unui corp producând asupra acestuia atât efect de forţă cât şi efect de moment.



a) b)

Fig. 9.8. Încărcări concentrate

Momentul concentrat (figura 9.8.b)

Momentul concentrat este o încărcare echivalentă acțiunii unui sistem de forțe ce se reduce la un cuplu de forțe. Momentul concentrat se reprezintă într-un punct al corpului. Cum în Mecanică toate corpurile sunt rigide, momentul concentrat este un vector liber, deci nu interesează punctul său de aplicație (interesează doar faptul că asupra corpului acționează acest moment concentrat). Momentul concentrat produce asupra corpului pe care acționează doar efect de moment (nu produce efect de forță).

Pentru încărcările distribuite se va prezenta modul de abordare a trei tipuri de încărcări întâlnite mai des, cu precizarea că legile de variație ale acestora sunt practic infinite. Acestea sunt încărcări distribuite pe lungime, fiind sisteme de forțe paralele:

Forța distribuită uniform (figura 9.9)

Forța distribuită uniform are aceeaşi intensitate p pe toată lungimea de distribuție l. Direcția şi sensul se indică prin direcția şi sensul unor săgeți ce reprezintă forțele care alcătuiesc această încărcare. Dacă sensul nu este indicat în mod explicit, sensul încărcării este de la încărcare la elementul pe care acționează.

Forța uniform distribuită este echivalentă cu acțiunea unei singure forțe având mărimea $p \cdot l$, direcția şi sensul identice cu cele ale forței distribuite şi punctul de aplicație la jumătatea lungimii de distribuție.

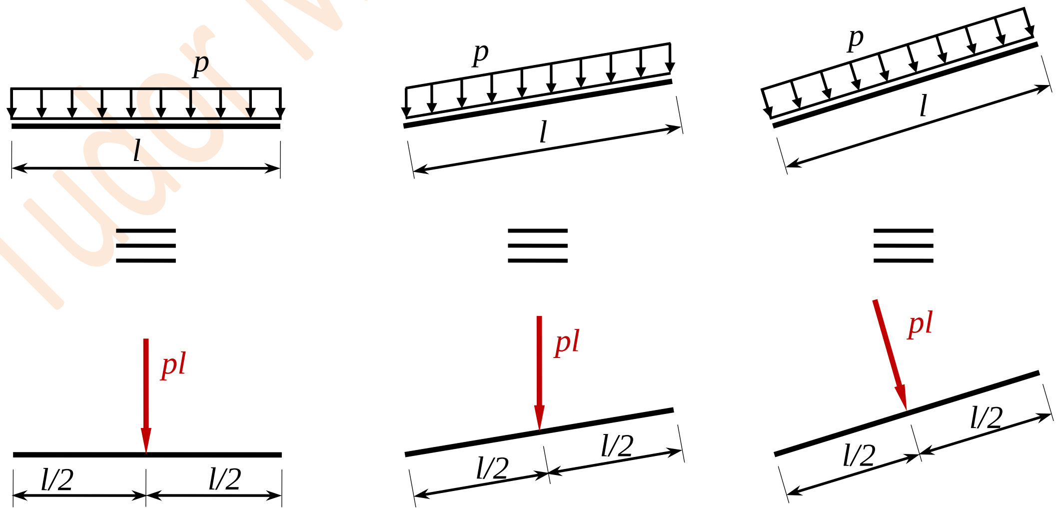


Fig. 9.9. Forța concentrată echivalentă unei forțe distribuite uniform

Forța distribuită liniar

Există două situații de forță distribuită liniar:

- forța distribuită triunghiular – distribuția începe de la intensitatea zero și variază liniar până la intensitatea maximă „*p*” a forței (figura 9.10);
- forța distribuită trapezoidal – distribuția începe de la intensitatea p_1 a forței și variază liniar până la intensitatea p_2 a forței (figura 9.11).

Forța distribuită triunghiular este echivalentă cu acțiunea unei singure forțe având mărimea $(p \cdot l)/2$, direcția și sensul identice cu cele ale forței distribuite și punctul de aplicație la o treime din lungimea de distribuție măsurată de la baza triunghiului ce reprezintă distribuția. În figura 8.10 se arată doar forța echivalentă corespunzătoare unei forțe distribuite cu direcția verticală ce acționează pe o lungime orizontală. Celelalte situații se tratează analog cu cele de la forța distribuită uniform (figura 9.9).

Fig. 9.10. Forța concentrată echivalentă unei forțe distribuite triunghiular

Forța distribuită trapezoidal se consideră ca sumă a două forțe distribuite triunghiular (figura 9.11)

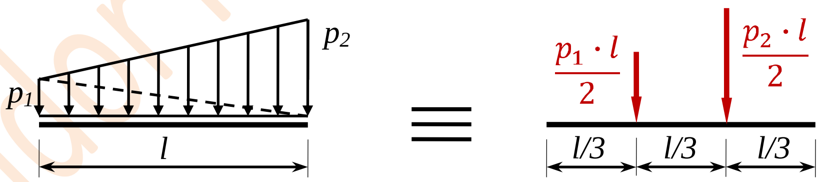


Fig. 9.11. Forțele concentrate echivalente unei forțe distribuite trapezoidal

Condițiile de echilibru scalare (în problema plană) se pot scrie în următoarele combinații:

1) Două ecuații de echilibru de forțe și o ecuație de momente în raport cu un punct oarecare din plan:

$$\sum X_i = 0 \;\; ; \;\; \sum Y_i = 0 \;\; ; \;\; \sum M_{zi} = \sum M_{Oi} = 0$$

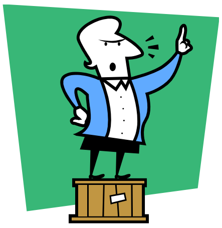
2) O singură ecuație de forțe şi două ecuații de momente în raport cu două puncte distincte din plan (restricție: direcția pe care se scrie ecuația de forțe să nu fie perpendiculară pe dreapta ce conține punctele în raport cu care se scriu ecuațiile de momente):

$$\sum F_{\Delta}=0\ ;\ \sum M_{Ai}=0\ ;\ \sum M_{Bi}=0\ ;\ \Delta\ \text{şi}\ \overline{AB}\ \textit{să nu fie perpendiculare}$$

3) Trei ecuații de momente în raport cu trei puncte distincte din plan (restricție: cele trei puncte să fie necoliniare):

$$\sum M_{Ai}=0\ \ ;\ \sum M_{Bi}=0\ ;\ \sum M_{Ci}=0\ ;\ A,B,C\ \textit{necoliniare}$$

9.2. Aplicații rezolvate

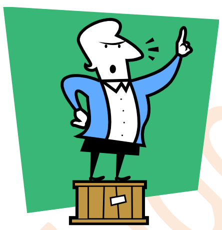


Enunț general

Să se determine reacțiunile din legăturile corpului din figură.

Etape de rezolvare

Etapele de rezolvare se vor observa în cadrul fiecărui exemplu considerat.



Enunț

APLICAȚIA 1

Pentru corpul din figura 9.12.a să se determine reacțiunile.

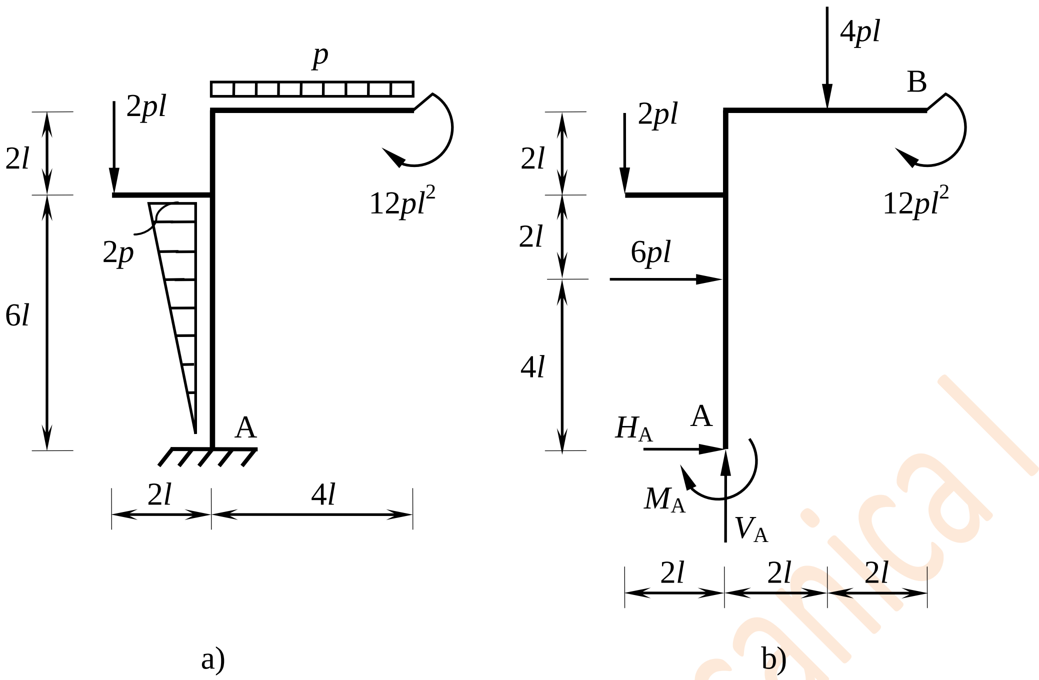


Fig. 9.12

Rezolvare:

Etape de rezolvare:

1) Se verifică dacă solidul rigid este static determinat.

Corpul are ca legătură o încastrare, deci este static determinat.

2) Se realizează schema statica în modul următor (figura 9.12.b):

- se izolează solidul rigid;
- se evidențiază forțele active, aranjate corespunzător (încărcările concentrate se arată aşa cum sunt iar încărcările distribuite se echivalează cu încărcările concentrate corespunzătoare);
- se înlocuiesc legăturile corpului cu reacțiunile corespunzătoare;
- se cotează figura.

Obs. Dacă pentru forțele distribuite nu se indică explicit sensul, acesta este de la încărcare către corpul pe care acționează.

3) Scrierea condițiilor de echilibru.

Pentru un corp cu legat printr-o încastrare se recomanda utilizarea a două ecuații de forțe și a unei ecuații de momente scrisă în raport cu punctul în care se realizează încastrarea. Această scriere a condițiilor de echilibru are ca rezultat un sistem de ecuații de echilibru decuplate, sistem de ecuații ce se rezolvă foarte uşor.

$$\sum X_i = 0 : \quad H_A + 6pl = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 : \quad V_A - 2pl - 4pl = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 : \quad M_A + 6pl \cdot 4l - 2pl \cdot 2l + 4pl \cdot 2l + 12pl^2 = 0 \ (3)$$

4) Rezolvarea ecuațiilor de echilibru.

$$(1)\ H_A = -6pl$$

$$(2)\ V_A = 6pl$$

$$(3)\ M_A = -40pl^2$$

Semnul „-” arată că sensul ales inițial pentru reacțiunile H_A şi M_A nu este cel corect.

5) Verificarea rezultatelor.

Verificarea se face printr-o ecuație de echilibru neutilizată la rezolvarea reacțiunilor. Deoarece necunoscutele s-au determinat independent unele în raport cu celelalte, în ecuația de verificare trebuie să intervină toate cele trei necunoscute. Ecuația aleasă pentru verificare va fi:

$$\sum M_B = 0 : \ M_A + V_A \cdot 4l - H_A \cdot 8l - 6pl \cdot 4l - 2pl \cdot 6l - 4pl \cdot 2l + 12pl^2 =$$

$$= -40pl^2 + 6pl \cdot 4l - (-6pl) \cdot 8l - 24pl^2 - 12pl^2 - 8pl^2 + 12pl^2 = 0$$

6) Reprezentarea rezultatelor

Reprezentarea rezultatelor se face pe schema rezultatelor, cu sensul corect şi intensitatea în valoare absolută (figura 9.13).

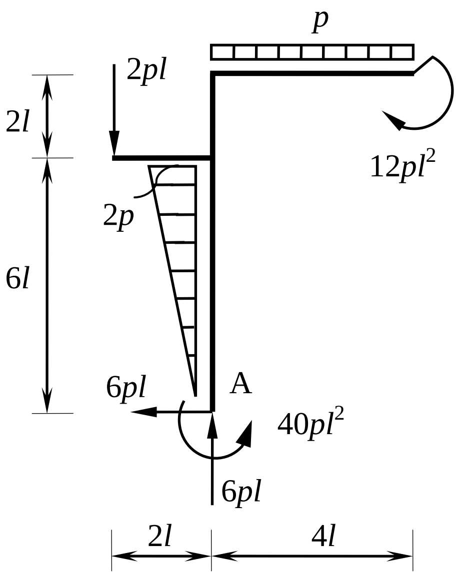


Fig. 9.13

Prezentarea rezultatelor şi modul de evaluare

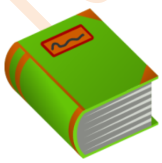
Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- verificarea corpului (dacă este static determinat) – 1p;
- realizarea corectă a schemei statice – 2p;
- scrierea ecuațiilor de echilibru – 3p;
- rezolvarea ecuațiilor de echilibru – 1p;
- verificarea rezultatelor – 1p;
- reprezentarea rezultatelor şi/sau eventuale comentarii – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplineşte obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.



Bibliografie modul

[1]. Szolga, V., Szolga, A. M., „Mecanica Teoretică. Note de curs şi îndrumător de seminar. Partea I", Editura Conspress, Bucureşti, 2003, pag. 88, 95.